LYCEE NASRALLAH « **4Sc2** » **PROF : BenTaiebLotfi**	04/11/2016 **2h** **DEVOIR DE CONTROLE N°1** **MATHEMATIQUES**

EXERCICE 1 (3 points)

1/ Le nombre complexe z = $\cos(\frac{3\pi}{10}) + i\sin(\frac{3\pi}{10})$ est une racine cinquième de :

a) 1 b) i c) -i

2/ U est une suite définie sur $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $n \leq U_n \leq n+1$ alors :

a) U est croissante b) U est bornée c) U est convergente

3/ Soit f une fonction tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et soit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}}$ on a :

a) $\lim_{x\to+\infty} gof(x) = +\infty$ b) $\lim_{x\to+\infty} gof(x) = 0$ c) $\lim_{x\to+\infty} gof(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 2 (6,5 points)

1/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation(E) : $z^2 + 2ie^{i\theta} z - 4(1-i) e^{i2\theta} = 0$ avec $\theta \in [0,\pi]$

a. Vérifier que $z_1 = -2e^{i\theta}$ est une solution de l'équation (E)
b. En déduire la deuxième solution z_2 de (E)

2/ On considère dans le plan complexe muni d'un R.O.N (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$)les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = -2e^{i\theta}$ et $z_2 = 2(1-i)e^{i\theta}$

a. Déterminer l'écriture exponentielle de z_1 et z_2
b. Montrer que M_1 varie sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
c. Déterminer l'ensemble des points M_2 lorsque θ varie dans $[0,\pi]$

3/ On prend $\theta = \frac{3\pi}{4}$

a. Vérifier que $z_1 = 2i\sqrt{2}$
b. Soit α un réel différent de ($\pi + 2k\pi$), k $\in \mathbb{Z}$.
Montrer que si $\frac{z}{1-z} = e^{i\alpha}$ alors $z = \frac{1}{2}(1+i\tan(\frac{\alpha}{2}))$
c. Déterminer les racines cubiques de i
d. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\frac{z\sqrt{2}}{1-z})^3 = 2i\sqrt{2}$

EXERCICE 3 (6,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par f(x) = $\begin{cases} \frac{\cos\sqrt{x}-1}{x} & si\ \ x > 0 \\ \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} & si\ \ x < 0 \end{cases}$

1/a. Montrer que pour tout réel x >0 on a : $\frac{-2}{x} \leq f(x) \leq 0$

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement

c. Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ = - $\frac{1}{2}$ et en déduire que f est prolongeable par continuité en 0

2/a. Vérifier que pour tout réel x < 0 on a f(x) = $\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}$

b. En déduire que f est strictement décroissante sur]-∞, 0[et déterminer f(]-∞, 0[)

3/ Soit g la fonction définie sur]-∞, 0[par g(x) = tan(πf(x))

a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} g(x)$.

b. Montrer que l'équation g(x) = -2 admet au moins une solution $\alpha \in]-3,-2[$

EXERCICE 4 (4 points)

Soit (U_n) la suite définie par u_0 = 0 et pour tout n ∈ IN, $U_{n+1} = \frac{U_n-1}{U_n+3}$

1)a. Montrer par récurrence que $U_n > -1$

b. Montrer que la suite U_n est décroissante.

c. Déduire que la suite U_n est convergente.

2) Soit (V_n) la suite définie sur IN par $V_n = \frac{1}{U_n+1}$

a. Montrer que V_n est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et donner son premier terme V_0

b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.