LYCÉE OUED ELLIL

DEVOIR DE CONTRÔLE N° 1

MATHÉMATIQUES

CLASSES : 4^{IEME} ANNÉE SECONDAIRE

SECTION : SCIECES EXPÉRIMENTALES

DURÉE : 2 HEURES

PROF : BELLASSOUED MOHAMED

ANNÉE SCOLAIRE : 2017-2018

EXERCICE 1: 5 POINTS

BAREME

On utilisant le tableau de variations si dessous d'une fonction f continue sur son domaine De definition ; répondre au questions suivantes :

1-Déterminer le domaine de définition de f **0.25**

2- Calculer les limites suivantes : **1,5**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right)$

x	$-\infty$		-1		0 ||		$+\infty$
f		↗	0		|| $+\infty$		
	-1			↘	-2 ||	↘	0

tableau de variations de f

3-Déterminer les images des intervalles suivantes par f : $\left]-\infty,-1\right]$; $\left]-\infty,0\right[$; $\left]0,+\infty\right[$ **0.75**

4- Montrer que l'équation $f(x)=-1$ admet dans $\mathbb{R}^*$ exactement une solutions α **0.75**

5-a-Déterminer le domaine de définition de la fonction $g=f\circ f$ **0,5**

b-Déterminer $\lim\limits_{x\to-1} f\circ f(x)$ **0,5**

c-Dresser le tableau de variations de la fonction g **0.75**

EXERCICE 2: 5 POINTS

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

1-a-Vérifier que $(3-i)^2=8-6i$ **0.25**

b-Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation **(E)** : $z^2-(1+i)z-2+2i=0$ **1**

2-Pour tout $\theta\in\left]0,\pi\right[$, on cosidere l'équation **(E_θ)** : $z^2-(1+e^{i\theta})z+(e^{i2\theta}+e^{i\theta})(1-e^{i2\theta})=0$

a-Verifier que Pour tout $\theta\in\left]0,\pi\right[$, $(e^{i2\theta}+e^{i\theta})$ est une solution de **(E_θ)** **0,5**

b-En déduire l'autre solution de l'équation **(E_θ)** **0,5**

3- Pour tout $\theta\in\left]0,\pi\right[$,on désigne par I , M , M' et M'' les points d'affixes respectives

$$z_I=1 \quad , \quad z=e^{i\theta} \quad , \quad z'=1-e^{i2\theta} \quad \text{et} \quad z''=e^{i2\theta}+e^{i\theta}$$

a-Montrer que le quadrilatère $IM'MM''$ est un parallélogramme **0,5**

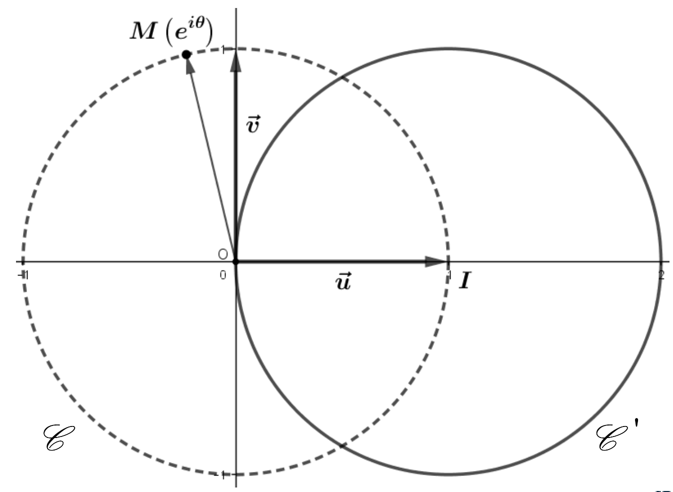
b-Donner l'écriture exponentielle de z' **0,75**

c-Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux **0,5**

4-On designe par $\mathscr{C}$ le cercle trigonometrique et par $\mathscr{C}'$ le cercle de centre I et de rayon 1

a-Verifier que Pour tout $\theta\in\left]0,\pi\right[$, $M'\in\mathscr{C}'$ **0,5**

b-Construre alors le point M' puis le point M'' pour un point M donné du cercle $\mathscr{C}$ **0,5**



BAREME

EXERCICE 3: 5 POINTS

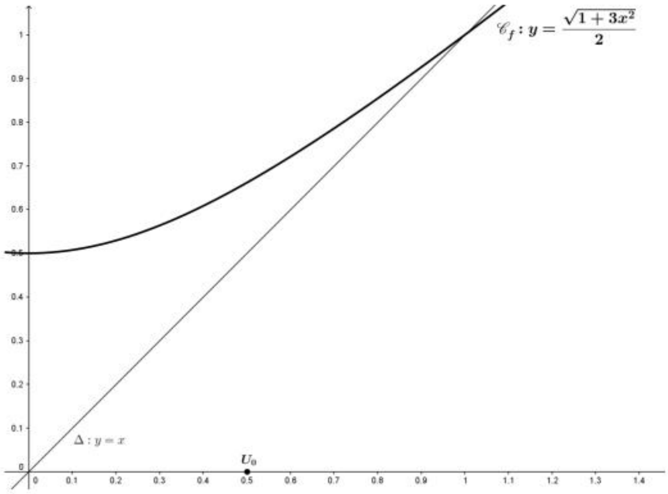
On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \dfrac{\sqrt{1+3U_n^2}}{2}$.

1- On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{2}$

On a tracé sur la feuille annexe la courbe représentative de f , ainsi que la droite $\Delta : y = x$

a- Placer soigneusement sur l'axe des abscisses sans les calculer les termes U_1 ; U_2 et U_3 — 0,75

b- Quelle conjecture peut-on former sur la monotonie et la convergence de la suite (U_n) — 0,5



2- a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \le U_n \le 1$ — 1

b- Montrer que la suite (U_n) est croissante — 0,75

c- En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite . — 0,75

3- a- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ — 0,75

on a : $U_n = \sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}}$

b- Retrouver alors la limite de la suite (U_n) — 0,5

EXERCICE 4: 5 POINTS

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos^3 x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

1-Montrer que f est continue à droite en 0 — 0,5

2- a- Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a : $0 \le f(x) \le \dfrac{2}{x^2}$ — 0,5

b-En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ — 0.25

3- On admet que la fonction f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

a-Calculer $f\left([0;+\infty[\right)$ — 0,5

b-Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0;+\infty[$ — 0,75

4- On considére la fontion h définie par $h(x) = f \circ f(x)$

a-Verifier que le domaine de définition de h est $[0;+\infty[$ — 0.25

b-Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ — 0.25

c- Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ — 0,5

5- Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = h(U_n)$

a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \le \alpha$ — 0,5

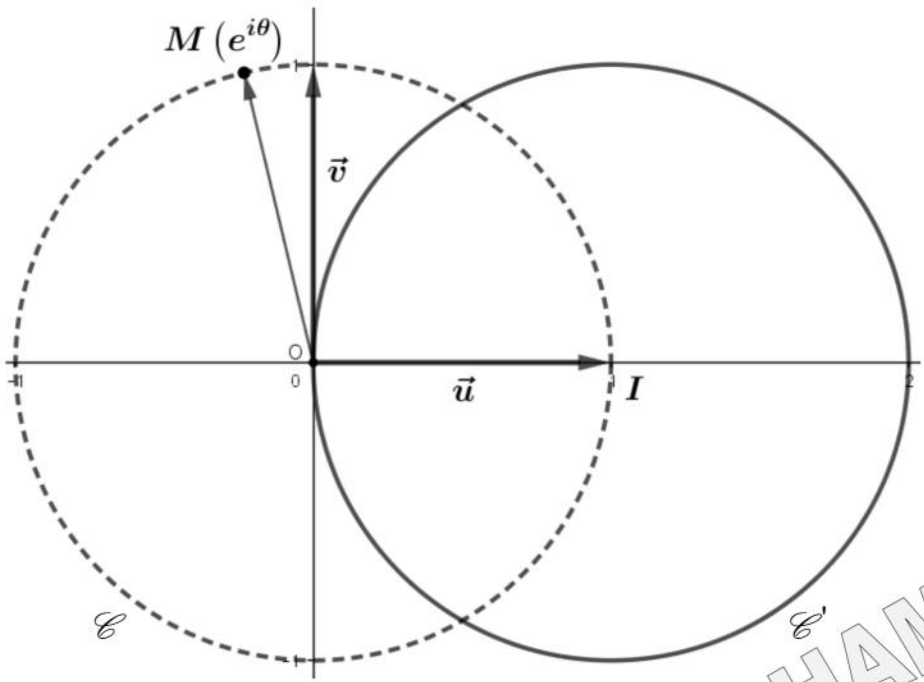
b- Montrer par récurrence que la suite (U_n) est croissante — 0,5

c- En déduire que la suite (U_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$. — 0,5

FEUILLE ANNEXE

NOM PRENOM CLASSE

EXERCICE 2:



EXERCICE 3: