Exercice N°1 :(7 points)

Soit f une fonction définie sur $IR \setminus \{0\}$ *par* $f(x) = \begin{cases} x^2\left(1 - cos\frac{\pi}{2x}\right) \; si \; x \in]-\infty;1]\setminus\{0\} \\ \sqrt{4x^2+12} - (2x+1) si \; x \in]1;+\infty[\end{cases}$

1) a) *Vérifier que pour tout* $x \in]-\infty;1]\setminus\{0\}$ *on a :* $0 \leq f(x) \leq 2x^2$

   b) *En déduire que f est prolongeable par continuité en 0*

2) *Montrer que f est continue en 1*

3) a) *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} fof(x)$

   b) *Montrer que :* $x^2\left(1 - cos\frac{\pi}{2x}\right) = \frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}X)}{(\frac{\pi}{2}X)^2}(\frac{\pi}{2})^2$ *si* $x = \frac{1}{X}$

   c) *Déduire que* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{8}$

   d) *Déterminer* $\lim\limits_{x\to1^+} f(2 - \frac{3}{x-1})$

4) a) *Montrer que :* $f(x) = \frac{3}{4}$ *admet au moins une solution* $\alpha \in [\frac{1}{2};1]$

   b) *Vérifie que* $\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right) = \frac{4\alpha^2-3}{4\alpha^2}$

Exercice N°2 :(6 points)

1) *Montrer que* $3 - 3i = 3\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$

2) *Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct* $(o,\vec{u},\vec{v})$ *on considère les points A (-3+i) ; B (1+4i) ; C (- 3 i) ; D (1) et E (-2i)*

   a) *Ecrire sous la forme algébrique le nombre complexe* $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$

   b) *Déduire que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A*

3) *Soit M un point du plan d'affixe* $z \neq 2i$ *et M'un point d'affixe z' tel que :* $z' = \frac{z+3-i}{z+2i}$

   a) *Déterminer les ensembles suivants*

$$\psi = \{M_z \in \mathcal{P} \; tel \; que |z'| = 1\}$$

$$\varphi = \{M_z \in \mathcal{P} \; tel \; que |z' - 1| = \sqrt{2}\}$$

   b) *Ecrire sous la forme algébrique le nombre complexe : (z' – 1)(z+2i)*

   c) *Déduire que :* $DM' \times EM = 3\sqrt{2}$ *et que :* $(\vec{u};\overrightarrow{DM'}) + (\vec{u};\overrightarrow{EM}) \equiv \frac{7\pi}{4}[2\pi]$

Exercice N°3 : (7 points)

I) a) Montrer que: $(2-i)^2 = 3-4i$

b) Déduiredans □ les solutions de l'équation :$(E): z^2-(1+2i)z-\frac{3}{2}+2i=0$

II) Le plan Complexe est muni d'un repère orthonormé direct$R(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A ; B et C d'affixes respectifs$z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_C=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_B=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

1) a) Construire les points A et C

b) Vérifier que $\frac{z_C}{z_A}=i$; puis déduire que OAC est rectangle en O

c) Ecrire (1- i) sous la forme exponentielle puis déduire que $(1-i)\,z_A=z_B$

d) Montrer que : OBAC est un parallélogramme puis Construire le point B

2) a) Ecrire z_B sous forme algébrique

b) Déduire les valeurs de $\cos(-\frac{\pi}{12})$ et $\sin(-\frac{\pi}{12})$

3) Soit M un point du plan. Déterminer et construire les ensembles$\psi=\{M_z \in P \text{ tel que : } z=az_B+z_A \text{ ou } a\in IR\}$

$\Omega=\{M_z\in P \text{ tel que : } a(z-z_B)=i(z-z_C);\ \text{ou } a\in IR^*\}$