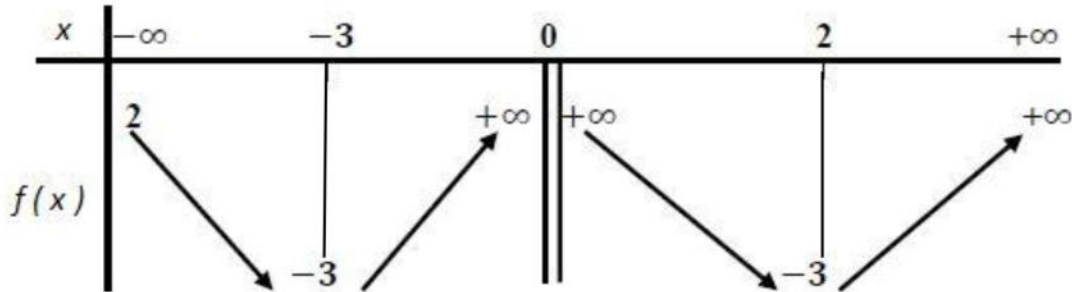


EXERCICE N : 1 (3 points)

Le tableau ci-dessous représente les variations d'une fonction f définie et **dérivable** sur \mathbb{R}^* .
On désigne par (Cf) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .



On suppose que la droite $\Delta : y = 3x + 2$ est une asymptote à (Cf) au voisinage de $+\infty$ et que la droite $T : y = -2x + 1$ est la tangente à (Cf) au point $A(1, -1)$.

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1}$ et $f(-\infty)$; $0()$.

2) Soit les fonctions g et h définies par : $g(x) = 3 + f(x)$ et $h(x) = f \circ g(x)$.

a) Déterminer les domaines de définition des fonctions g et h .

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ et $h'(1)$.

EXERCICE N : 2 (6.5 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{\pi}{x}) & \text{si } x \in]-\infty ; 0[\\ \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$

On désigne par (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty ; 0[$ on a : $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$.

b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 .

3) a) Montrer que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2 \sqrt{x^2+1}}$.

b) Prouver alors que f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ puis déterminer $f(]0 ; +\infty[)$.

c) Dédire que l'équation : $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution $\alpha \in]0 ; +\infty[$.

4) a) Justifier la continuité de f sur $] -\infty ; 0[$.

b) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet au moins une solution $\beta \in] -2 ; -1[$.



EXERCICE N : 3 (5 points)

1) Ecrire sous la forme exponentielle le nombre complexe : $a = -2 + 2i\sqrt{3}$.

2) Soit $f(Z) = Z^2 + (1 - 2i\sqrt{3})Z - 2 + 2i\sqrt{3}$ où Z est un nombre complexe .

a) Calculer $f(1)$.

b) Déterminer alors les solutions de l'équation $f(Z) = 0$.

c) Dédurre dans \mathbb{C} les solutions de l'équation : $Z^4 + (1 - 2i\sqrt{3})Z^2 - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points

$A(1)$, $B_{(-2+2i\sqrt{3})}$ et C d'affixe Z_C tel que $\text{Re}(Z_C) = \frac{5}{2}$ et $\arg(Z_C) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

a) Placer les points A , B et C (laisser les traces de constructions apparentes) .

b) Calculer $|Z_C|$ puis déduire que $Z_C = \frac{5}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

4) a) Prouver que $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) Dédurre alors la nature du triangle ABC (Justifier) .

EXERCICE N : 4 (5.5 points)

I) Soit m non nul .

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $Z^2 - 2imZ - (1 + m^2) = 0$.

II) On suppose dans cette question que m est un réel .

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $R(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A , M_1 et M_2 d'affixes respectives : $Z_0 = i$, $Z_1 = im + 1$ et $Z_2 = im - 1$

1) Vérifier que : $OM_1 = OM_2$.

2) Montrer que (OA) est la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.

3) Déterminer les valeurs de m , pour lesquelles le triangle OM_1M_2 est équilatéral .

III) On suppose dans cette question que : $m = -ie^{2i\theta}$ où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1) a) Déterminer la forme exponentielle de Z_1 et Z_2 en fonction de θ .

b) Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$ en fonction de θ .

c) Dédurre la nature du triangle OM_1M_2 .

2) a) Montrer que $\frac{OM_2}{OM_1} = \text{tg}(\theta)$.

b) Dédurre la valeur de θ pour laquelle OM_1M_2 est isocèle .

