Lycée Ghannouch **13 – 11 – 2017**	**BAC Science**
	Devoir de contrôle N° : 1
Prof: Taieb	**Mathématiques** **durée : 2h**

Exercice N° : 1 (6 points)

1) a) Vérifier que $(1-2\sqrt{3}i)^2 = -11 - 4i\sqrt{3}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 3 + i\sqrt{3} = 0$

c) Mettre les solutions sous forme exponentielle.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé$(O,\vec{u},\vec{v})$,

On donne les points A, B et M d'affixes respectives : $z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_M = \sqrt{3}e^{i\theta}$; $\theta \in \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

a) Montrer que $z_M - z_A = 2i\sqrt{3}\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$ en déduire la distance AM en fonction de θ.

b) Déterminer θ pour que le triangle OAM soit isocèle en A.

3) Atout point M d'affixe z tel que $z \neq i\sqrt{3}$ on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = i(\frac{z-1+\sqrt{3}\,i}{z-i\sqrt{3}})$

a)Montrer que pour tout $z \neq i\sqrt{3}$ on a : $|z'| = \frac{BM}{AM}$ et $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)[2\pi]$

b) Déterminer les deux ensembles suivants :

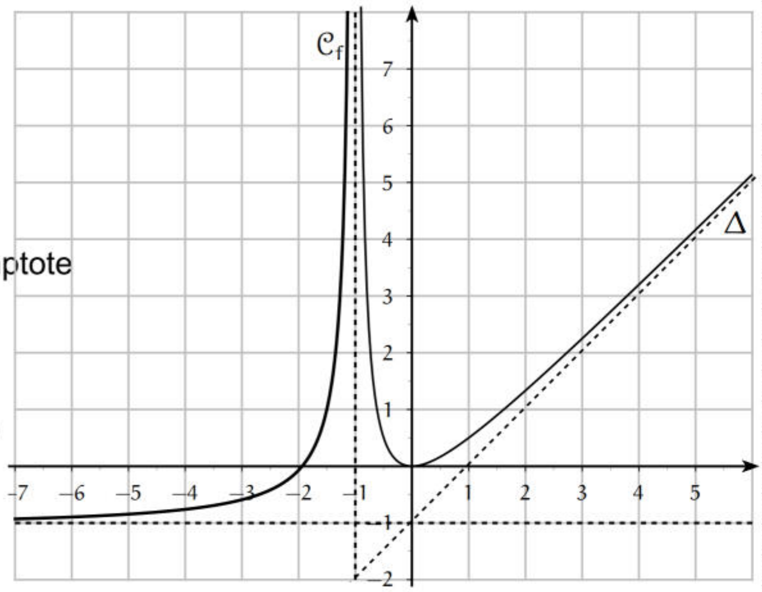
$E = \{M(z) \in P / |z'| = 1\}$ et $F = \{M(z) \in P / z' \text{ imaginaire}\}$

Exercice N° : 2(5 points)

La courbe ci-dessous représente une fonction

f définie et continue sur IR/{-1} qui admet :

- La droite Δ : y=x-1 comme asymptote oblique au voisinage de $(+\infty)$
- La droite Δ' : y=-1 comme asymptote au voisinage de $(-\infty)$
- La droite d'équation x=-1 comme asymptote verticale à Cf



1) Déterminer graphiquement

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x+1)$

b) $\lim_{x\to-1} f(x)$ .En déduire $\lim_{x\to-\infty} f(\frac{-x+1}{x+1})$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x^2)}{x}$

2) Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g

b) Montrer que g est prolongeable par continuité en -1

3) a) Montrer que la fonction f o f est définie sur IR /{-1}

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ f)(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\circ f)(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{fof(x)}{f(x)}$

EXERCICE N° : 3 (4 POINTS)

Soit f la fonction définie sur IR par f(x)= $\begin{cases} x\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)+1 & ;\ \text{si } x<0 \\ x^3-3x+1 & ;\ \text{si } 0\le x\le 1 \\ \sqrt{x^2-x}-x & ;\ \text{si } x>1 \end{cases}$

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ = -1/2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) Montrer que pour tout **x**< **0** , on a: $1\le f(x)\le -2x+1$.

a) En déduire $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ puis montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est continue en 1.

3) a) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une **unique** solution α dans]0,1[

b) Montrer que $\alpha=\frac{1}{3-\alpha^2}$

EXERCICE N° : 4 (5 POINTS)

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=0$ et $\forall n\in IN, u_{n+1}=\frac{1+2u_n}{2+u_n}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout n∈IN, $0\le u_n\le 1$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c)En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout n∈IN, $0\le 1-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(1-u_n)$

b) En déduire que pour tout n∈IN, $0\le 1-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) Soit la somme $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k,\ n\ge1$

a) Montrer que pour tout entier n ≥ 1, n-1 + $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ≤ S_n ≤ n

b) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$.

BON TRAVAIL