Lycée Teboulba
Professeur : Aouichaoui *A
Epreuve : Mathématiques
Année : Le 27-10-2018

Devoir de Contrôle N°1

Niveau : $4^{ème}$ année
Section : Sciences Exp_1
Durée : 2 h
Coefficient : 3

Exercice N°1 : (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = -1+i\sqrt{3}$, $z_B = -1-i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$

1)a) Ecrire z_A et z_B sous la forme trigonométrique.

b) montrer que $z_A^{2016} \in IR_+$.

c) Placer les points A, B et C dans le repère $(o,\vec{u},\vec{v})$ avec précision.

2) a) Vérifier que $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

3) Soit les points D et E d'affixes respectives $z_D = 1+ e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_E = 1+z_D^2$.

a) Montrer que D appartient au cercle de centre A' et de rayon 1 avec $z_{A'} = 1$.

b) Montrer que $\left(\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{A'D}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ puis placer le point D.

4) a) Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $z_D - z_{A'}$ et $z_E - z_{A'}$.

b) En déduire que les points A',D et E sont alignés

c) Placer le point E.

Exercice N°2 :(3 points)

Soit la fonction f définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x+\cos x-1$

1) a) Montrer que f est strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Déterminer $f(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right])$,en déduire que $1-x \le \cos x$ pour tout réel x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2) Soit la suite (U_n) définie sur IN^* par : $U_n = \dfrac{1}{n}\left(\cos(\dfrac{1}{n^2})+\cos(\dfrac{2}{n^2})+...+\cos(\dfrac{n}{n^2})\right)$.

a) Vérifier que : $1-\dfrac{k}{n^2} \le \cos(\dfrac{k}{n^2}) \le 1$ pour tout entier $k \in \{1,2,...,n\}$.

b) En déduire que : $1-\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2} \le U_n \le 1$.

c) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice N°3 :(4points)

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n} \end{cases}$ *pour tout entier naturel* n.

1) a) Montrer que la suite U est majorée par 4.
   b) Montrer que la suite U est strictement croissante
   c) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite

2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

   b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $4 - u_n \leq 4(0,5)^n$.

   c) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice N°4:(6points)

On donne. $u(x) = 4x^5 - 5x^4 - 4$ pour tout $x \geq 0$.

1) a) Dresser le tableau de variation de u
   b) Montrer que l'équation u(x) = 0 admet une seule solution $\alpha \in \left]1,3\,;1,5\right[$.
   c) En déduire le signe de u(x) pour tout $x \geq 0$.

2) Soit la fonction f définie sur IR\{1} par : $\begin{cases} f(x) = 1 + \dfrac{\sin(\sqrt{x^2+1}-1)}{x} & si\ x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x^5+5x-1}{x-1} & si\ x \geq 0\ et\ x \neq 1 \end{cases}$

   a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

   b) Montrer que pour tout $x < 0$ on a $1 + \dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 - \dfrac{1}{x}$

   c) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ puis interpréter le résultat obtenu.

3) Montrer que f est continue en 0.

4) Soit g la restriction de f sur $IR_+ \backslash \{1\}$

   a) Montrer que g est dérivable sur $IR_+ \backslash \{1\}$ et que $g'(x) = \dfrac{u(x)}{(x-1)^2}$.

   b) Donner le tableau de variation de g.

   c) Déterminer : $g\left(\left[0,1\right[\right)$ et $g\left(\left]1,+\infty\right[\right)$.

Bon travail