Lycée Souassi 2018 -2019	Devoir de contrôle N°1 MATHEMATIQUES	Prof :A.AZZOUZ Durée :2h Classe : 4SC$_1$

Exercice N°1 (5pts)

Soit f la fonction définie sur IR^* par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}........si....x\leq 0\\ \dfrac{x^3\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{x^2+1}........si....x\geq 0\end{cases}$

1) Calculer : $\lim\limits_{-\infty} f(x)$

2) Montrer que : $\lim\limits_{+\infty} f(x)=\pi$

3) a) Montrer que pour tout $x\geq 0$; on a : $|f(x)|\leq x^3$

b) En déduire la limite de f à droite en 0.

c) f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? justifier .

4) a) Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet au moins une solution $\alpha\in]1;2[$

b) Vérifier que: $\sin\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}$

5) Calculer : $\lim\limits_{+\infty} f\left(\dfrac{\pi}{f(x)}\right)$ et $\lim\limits_{-\infty} f\left(\dfrac{\alpha.x^2}{x^2+1}\right)$

Exercice N° 2 (6pts)

Soit $\theta\in[0;\pi]$.

Dans **la figure1** (Annexe à rendre avec la copie) on donne :

. $(O;\vec{u};\vec{v})$ est un repère orthonormé direct.

. (ζ) est un cercle de centre O et de rayon 1.

. E est un point de (ζ) tel que $(\vec{u};\overrightarrow{OE})\equiv\theta[2\pi]$.

. D est un point de $(O;\vec{v})$ tel que : $z_D=i\sqrt{1+\sqrt{2}}$

1) a) Vérifier que : $OD^2=1+\sqrt{2}$

b) Soit A le point d'affixe $z_A=z_D.e^{i\theta}$

Vérifier que $z_A=OD..e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$

c) Construire alors le point A.

2) On considère l'équation $(E): z^2+\dfrac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0$

a) Vérifier que z_A est une solution de l'équation (E).

b) On désigne par B le point d'affixe z_B où z_B est la deuxième solution de l'équation (E) .

Prouver que : $z_B = \frac{1}{OD} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$.

3) a) Montrer que : O ; A et B sont alignés.

b) Placer le point C d'affixe $z_C = ODe^{i\theta}$

4) a) Montrer que : $\frac{Aff\,(\overrightarrow{AC})}{Aff\,(\overrightarrow{AB})} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

b) En déduire que ABC est un triangle isocèle et que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

c) Construire alors le point B.

Exercice N°3 (5pts)

1) Déterminer les racines cubiques de l'unité.

2) a)Vérifier que $\left[3\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{3}\right)\right]^2 = -54 + 54\sqrt{3}i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_1): 2z^2 + 3\left(i-\sqrt{3}\right)z + 9\left(1-i\sqrt{3}\right) = 0$

(On notera z_1 la solution imaginaire pure et z_2 l'autre solution)

c) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

3) Soit le nombre complexe $z_3 = -\overline{z_2}$

Vérifier que $z_3 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$

4) Montrer que $z_1; z_2$ et z_3 sont les racines cubiques de $27i$

5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_2): z^6 - (1+27i)z^3 + 27i = 0$

Exercices N°4 (4 pts)

Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2 - U_n + 2}{1+U_n} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $1 \le U_n \le 2$

2) a)Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3) a)Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $0 \le U_{n+1} - 1 \le \frac{1}{3}(U_n - 1)$

b) En déduire que pour tout $n \in IN$ on a : $0 \le U_n - 1 \le \frac{1}{3^n}$

c) Retrouver : $\lim\limits_{+\infty} U_n$

NOM ……………………..PRENOM ………………………..

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE