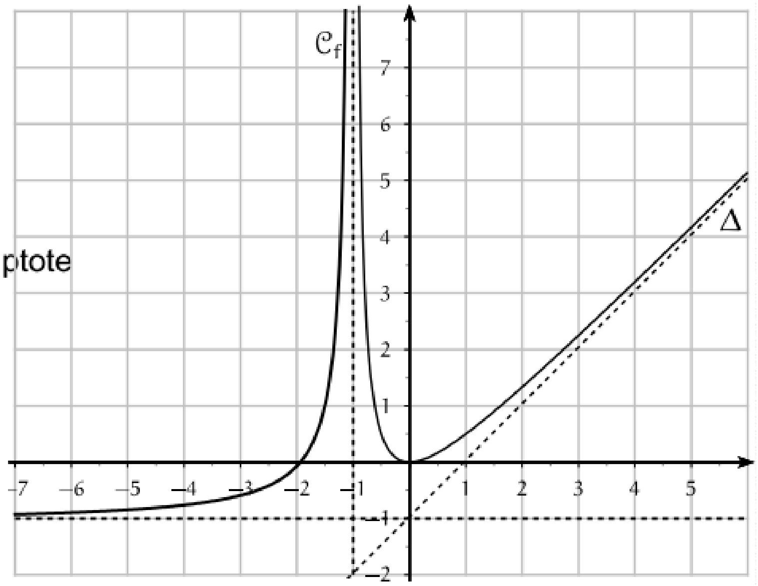
Exercice 1

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et continue sur IR/{-1} qui admet :



- La droite Δ : y=x-1 comme asymptote oblique au voisinage de $(+\infty)$
- La droite Δ' : y=-1 comme asymptote au voisinage de $(-\infty)$
- La droite d'équation x=-1 comme asymptote verticale à Cf

1) Déterminer graphiquement

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x+1)$

b) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ .En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(\frac{-x+1}{x+1})$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x^2)}{x}$

2) Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g

b) Montrer que g est prolongeable par continuité en -1

3) a) Montrer que la fonction f o f est définie sur IR /{-1}

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f\circ f)(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (f\circ f)(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{fof(x)}{f(x)}$

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.
Soit le nombre complexe $z = i + e^{i\theta}$; $\theta \in [0,\pi]$.

1) Vérifier que $z = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$

2) Pour cette question, on prend $\theta = \frac{\pi}{3}$.

a) Ecrire z sous forme algébrique puis montrer que $|z|^2 = 2+\sqrt{3}$.

b) Ecrire z sous forme exponentielle.

c) En déduire la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3) Soit les points $N\left(e^{i\theta}\right)$, $A(-i)$ et $I(1)$.

a) Montrer que $\frac{z_{\overrightarrow{AN}}}{z_{\overrightarrow{AI}}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

b) En déduire la valeur de θ pour laquelle les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont orthogonaux.

Librairie Devoir.TN
53 04 42 33 | 99 06 27 69

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+2} & si\ x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x^2}{4\sqrt{x^2+1}-1} & si\ \ x < 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0 .

2) a) Montrer que pour tout x ≥ 0 on a : $\frac{1-\sqrt{x}}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+2}$

b) Calculer alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty}[f(x) + \frac{1}{4}x]$

b) Interpréter graphiquement le résultat .

4) a) Montrer que f(x) = 0 admet au moins une solution α dans $]\frac{\pi}{2} ; \pi[$

b.) Montrer que tan(α) = $-\sqrt{\alpha - 1}$

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, *on donne* $\theta \in [\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}[$.

On considère les points M et N d'affixes respectives : $Z_M = i + e^{i\theta}$ *et* $Z_N = e^{i\theta}$.

1) *Déterminer et construire l'ensemble* **(Γ)** *des points M lorsque* θ *varie dans* $[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}[$.

2) *Déterminer la valeur de* θ *pour laquelle O , M et N sont alignés .*

3) *Vérifier que la forme exponentielle de* Z_M *est :* $Z_M = 2\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}$.

4) *Pour toute la suite :* $\theta = \frac{\pi}{3}$.

a) *Ecrire* Z_M *sous forme cartésienne puis montrer que* $|Z_M|^2 = 2 + \sqrt{3}$.

b) *Ecrire* Z_M *sous forme exponentielle puis déduire la valeur exacte de* $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Bon courage « mr bourbia jaouhar »

Librairie Devoir.TN
53 04 42 33 | 99 06 27 69