Devoir contrôle N°1

Exercice 1 : (3pts)

Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante puis ***justifier cette réponse****.*

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

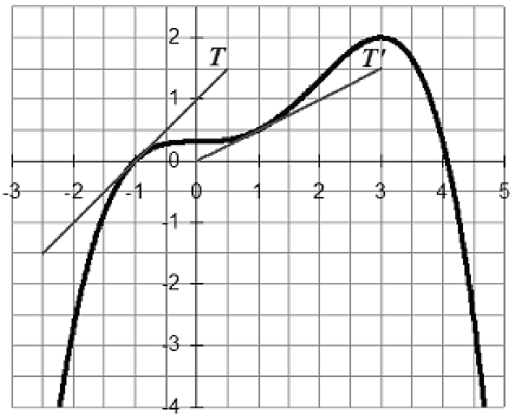
1) L'équation $f(x)=0$ admet :

   A. une solution B. deux solutions C. trois solutions

2) On note f' la dérivée de la fonction f. On peut affirmer que :

   A. $f'(-2)\times f'(1)\leq 0$ B. $f'(2)\times f'(5)\geq 0$ C. $f'(4)\times f'(7)\geq 0$

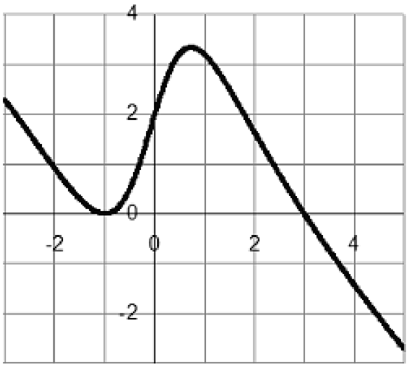
3) On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction . Les droites T et T' sont tangentes à la courbe aux points d'abscisses respectives -1 et 1

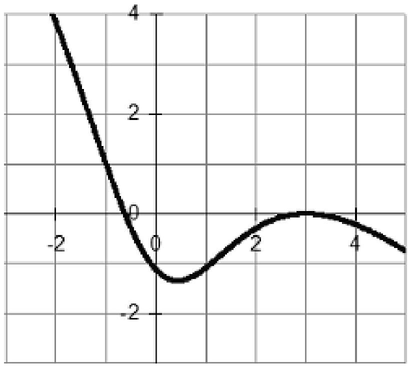


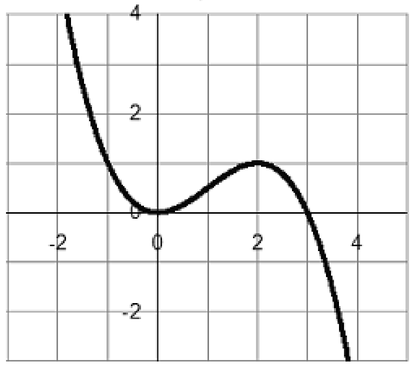
   A. $f'(-1)=0$ B. $f'(-1)=2\times f'(1)$ C. $f'(1)=2\times f'(-1)$

4) Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f'. Déterminer laquelle.

   A. courbe C_1 B. courbe C_2 C. courbe C_3







Exercice2 : (6pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$ et par $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

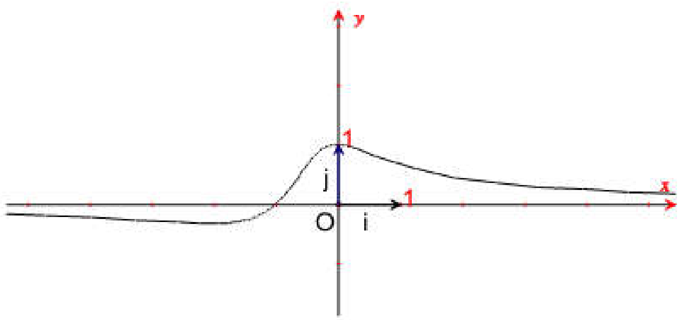
1) Soit $\theta \in]0,\pi[$. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : (E_θ): $z^2 - (2 + e^{i\theta})z + 1 + e^{i\theta} = 0$.
2) Soit B le point d'affixe $z_B = 1 + e^{i\theta}$ et E le point d'affixe $z_E = 1 + z_B^2$.
   a/ Montrer que B appartient au cercle $\mathscr{C}$.
   b/ Montrer que : $z_B = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$.
   c/ En déduire que : $\frac{z_E - z_A}{z_B - z_A}$ est un réel. Interpréter géométriquement le résultat.
3) Dans la suite de l'exercice, on pose $\theta = \frac{\pi}{3}$.
   a/ Donner la forme algébrique de z_B .
   b/ Construire les points B et E.

Exercice3 : (7pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+9}+5 & si\ x \le 0 \\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+4}-2} & si\ x > 0 \end{cases}$

1) a/ Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
   b/ Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\frac{-1}{\sqrt{x+4}-2} \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x+4}-2}$.
   En déduire: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2) On pose, pour $x > 0$, $g(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.
   a/ Calculer : $\lim_{x\to 0^+} g(x)$.
   b/ En déduire $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
   c/ La fonction f est-elle continue en 0 ?
3) La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction h continue sur IR
   Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(f(x))$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(h(x))$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(f(x))$.



Exercice 4 (4 points)

1. Déterminer z_1 et z_2 les racines carrées du nombre complexe 8i.
2. a) Déterminer les nombres complexes b et c tels que pour tout complexe z, on ait :
   $z^3 - 3iz^2 - 8iz - 24 = (z-3i)(z^2+bz+c)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 3iz^2 - 8iz - 24 = 0$.
   c) Vérifier que la somme des solutions de (E) est imaginaire pure et que leur produit est réel.