LYCEE EL FAOUAR-KEBELI	DEVOIR DE CONTROLE N°1
Niveau : 4ème année	Durée : 2 Heures
Section : sciences expérimentales	Année scolaire : 2018/2019
Epreuve : Mathématiques	Professeur : El Fekih Nader

Le sujet comporte trois pages numérotées de 1/3 à 3/3

EXERCICE 1 (7 pts)

Soit la fonction **f** définie sur IR* par $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & si \quad x<0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & si \ x>0 \end{cases}$

1- Montrer que **f** est continue sur IR*.

2-a-Vérifier que pour tout $\mathbf{x < 0, -x^2 \leq f(x) \leq x^2}$

b-Calculer alors $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

c- Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Donner son prolongement F

d-Vérifier que pour tout $x<0$; $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \times \frac{\sin(\pi x)}{x}$

e-En deduire que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ (**on pourra remarquer que** $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$)

f-Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, Interpréter graphiquement le résultat

2- Le tableau ci-dessous donne les variations d'une fonction **g** continue sur ℝ vérifiant : $\mathbf{g(0) = 2}$ et $\mathbf{g(2) = 0}$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

a-Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f\circ g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f\circ g(x)$

b-Calculer $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{g(x)}$

c- Montrer que $\mathbf{f\circ g}$ est continue sur $]-\infty, 2[$.

d-énoncer le théorème des valeurs intermédiaires

e-Montrer que $\mathbf{F}\circ\mathbf{g}(\mathbf{x})=\frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans [0,2].

EXERCICE 2 (4 pts)

le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{U}\,;\vec{V})$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation E : $z^2-4z-2\bar{z}+8=0$

1-verifier que $\alpha=1+i\sqrt{3}$ est une solution de E.

2-Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2 ; α et $\bar{\alpha}$

a-Vérifier que les points A, B et C appartiennent à un même cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon

b- Construire les points A, B et C

3-Soit D un point de $(\mathcal{C})$ tel que $(\vec{U}\,;\overrightarrow{OD})\equiv\theta\,[2\pi]$

Placer le point E d'affixe $z_E=\alpha e^{i\theta}$

4-Soient F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE]

a-Justifier que $z_F=\frac{\alpha}{2}+e^{i\theta}$ et $z_G=\frac{\alpha e^{i\theta}+\bar{\alpha}}{2}$

b-Montrer que : $\frac{z_G-2}{z_F-2}=\frac{\alpha}{2}$

c-En déduire que le triangle AFG est équilatéral

EXERCICE 3 (5 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{U}.\vec{V})$

Soit I le point d'affixe 1, $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1 et $(\mathcal{C}')$ le cercle de centre I et de rayon 1

Soit z un nombre complexe non nul, M, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives :

z ; $z_1=1+iz$ et $z_2=1-iz$

1-Vérifier que I est le milieu du segment $[M_1\ M_2]$

2-Dans cette question, on prendra $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

a-Déterminer la forme trigonométrique de z

b-Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique c-Montrer que $\overrightarrow{\mathbf{MM_1}}$ et $\vec{\mathbf{U}}$ sont colinéaires

d-Montrer que $\mathbf{M_1} \in (\mathcal{C}')$

e-Construire les points M ;$\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$ dans le repère $(O;\vec{U}.\vec{V})$

3-On suppose que $z \neq -i$

a-Montrer que :$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-z\bar{z}+i(z+\bar{z})}{|z_2|^2}$

b-En déduire que : O ;$\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$ sont alignées si et seulement si Re(z)=0

Et que $\overrightarrow{\mathbf{OM_1}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{OM_2}}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\bar{z}=1$

4-a-Montrer que $|z|=1$ si et seulement si $|z_1-z_2|=2$

b-En déduire à quel ensemble appartiennent les points $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$,lorsque M décrit $(\mathcal{C})$

EXERCICE 4 (4 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ;\vec{U}.\vec{V})$

Soit le nombre complexe $z=i+e^{i\theta}$;$\theta \in [0;\pi]$

1-Vérifier que $z=2\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}$

2-Pour cette question on prend $\theta=\frac{\pi}{3}$

a-Ecrire $\mathbf{z}$ sous forme algébrique puis montrer que $|z|^2=2+\sqrt{3}$

b-Ecrire $\mathbf{z}$ sous forme exponentielle

c-En déduire la valeur exacte de $\cos^2(\frac{\pi}{12})$

3-Soit les points N $(e^{i\theta})$, A (−i) et I(1)

a-Montrer que $\frac{z_{\overrightarrow{AN}}}{z_{\overrightarrow{AI}}}=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$

b-En déduire la valeur de θ pour laquelle les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{AN}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{AI}}$ sont orthogonaux

☺ ☺ ☺BON TRAVAIL ☺ ☺ ☺