## Exercice N °1 ( 6 points)

Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & \text{si } x<1\\ \sqrt{x^2+x+2}-x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Montrer que pour tout x $\in \left]-\infty;1\right[$, on a : $\dfrac{x+1}{x-1}\leq f(x)\leq 1$ , en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x).

3) Montrer que $\lim\limits_{x\to1^-}$ f(x) =1 ( on pourra poser t = x-1).

4) Montrer que f est continue en 1 puis déduire que f est continue sur tout IR.

5) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution α dans $\left]\dfrac{-1}{2},0\right[$ .

   b) Déduire que sin(πα) = - $\sqrt{1-\alpha^2}$ .

6) cCaclucler $\lim\limits_{x\to+\infty} fof(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$

## Exercice N°2 ( 5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ , on note les points A , B et I du plan d'affixes respectives $z_A$ = 1+i$\sqrt{3}$ , $z_B$ = 2i et $z_I$= $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$ .

1) a - Mettre les nombres complexes $z_A$ et $z_B$ sous forme exponentielle .

   b- Vérifier que les points A et B sont deux points du cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon 2.

   c- Vérifier que I est le milieu de [AB].

   d- Construire le cercle ($\mathscr{C}$) ainsi que les points A, B et I .

   e- Montrer que $Z_A$ est une racine cubique de -8 et que $Z_B$ est une racine huitième de 256.

2) a- Justifier que la demi droite [OI) est la bissectrice de l'angle $A\hat{O}B$.

   b- Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ .

   c- Montrer que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OI}}\right)=\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ .

   d-En déduire que $Z_I$= $\sqrt{2+\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

3) Donner alors les valeurs exactes de cos ( $\dfrac{5\pi}{12}$ ) et sin ( $\dfrac{5\pi}{12}$ ).

4) Montrer que$(Z_I)^{12}\in IR_-$ et $(Z_I)^{120}\in IR_+$ .

***Exercice N°3*** ( 5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ( unite graphique 2 cm ) représenter les points A , B , C , D et E d'affixes respectifs d'affixe i ,-i ,1-i , 2+i et 1+3i

1) Déterminer la nature du quadrilatère ACDE

2) Soit l'application f définie par f(z) = z' tel que z' = $\dfrac{iz+1}{z+i}$ avec z $\neq$ -i

   Calculer f(1-i) ,f( $\dfrac{2-i}{5}$ ) et $|z'-i||z+i|$.

3) On désigne par M et M' les points du plan d'affixes respectives z et z', Montrer que si M est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 2 alors M' est un point d'un cercle de $\mathscr{C}'$ que l'on déterminera.

4) Prouver que pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus$ {i,-i} alors arg(z') $\equiv \dfrac{\pi}{2}+\left(\widehat{\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}}\right)[2\pi]$.

   en déduire que z' est imaginaire pure est équivaut à z est imaginaire pure .

5) Interpréter géométriquement $|z'|$ ,puis déterminer l'ensemble des points M vérifiant $|z'|$ =1.

6) Montrer que z' est réel est équivant a $|z|$ =1.

***Exercice N°4*** *(4 points)*

Soit la suite ($U_n$) définie par $U_o$ = 2 et $U_{n+1}=\dfrac{U_n{}^2-U_n+2}{1+U_n}$ .

1)a - Montrer que pour tout n de IN ; $1 < U_n \leq 2$

b- Montrer que la suite U est décroissante .

c- En déduire que la suite U est convergente .

2)a- Montrer que pour tout entier naturel n de IN on a :$0 < U_{n+1}-1 \leq \dfrac{1}{3}(U_n-1)$.

b- Montrer alors que pour tout entier naturel n on a : $0 < U_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ .

puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ .