Lycée Secondaire Ibn Charaf A.S. 2018 – 2019 | 23/10/2018	Devoir de contrôle n°1 MATHÉMATIQUES		
Section : 4ème Sciences expérimentales 2	Durée : 2h	Coef. : 3	Pr. Maayoufi

L'épreuve comporte deux pages numérotées de 1/2 à 2/2.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction. ***Le barème est approximatif.***

Exercice 1 : (4 points)

I. Indiquer la réponse exacte :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right]$ égale à :

a/ 0 b/ 2 c/ $+\infty$

2) L'équation : $x^5+x-3=0$ possède dans $\mathbb{R}$:

a/ une solution b/ deux solutions c/ cinq solutions.

3) La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n=\cos(n\pi)^{n+1}$:

a/converge vers 1 b/ converge vers -1 c/ n'admet pas de limite.

II. Répondre par **vrai** ou **faux**, en justifiant la réponse :

1) $f(]-1\,;1[)$ par la fonction : $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ est $]0\,;1[$.

2) Soit z un nombre complexe non nul ; si $|z|=1$ alors $\bar{z}=\frac{1}{z}$.

3) Un argument du nombre complexe : $1+e^{i\theta}$ est : $\frac{\theta}{2}$.

Exercice 2 : (5,5 points)

I- Le plan complexe est rapporté à ROND $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=3$; $z_B=-i$ et $z_C=2+3i$.

1) Placer les points A, B et C dans le plan $\mathscr{P}$.

2) a/ Calculer les modules : $|z_B-z_A|$ et $|z_C-z_A|$.

b/ Donner un argument de: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$. En déduire la nature du triangle ABC.

3) a/ Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M(z) tels que : $|z+i|=2$.

b/ Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M(z) tels que : $|iz-3i|=|z-2-3i|$.

II- On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives :
$z_A=1+i$; $z_B=\sqrt{3}+i$; $z_C=1-i\sqrt{3}$ et $z_D=(\sqrt{3}+1)+i(1-\sqrt{3})$.

1) a/ Écrire la forme exponentielle de z_A; z_B et z_C.

b/ Placer les points A, B et C dans le repère considéré.

c/Montrer que OBC est un triangle rectangle est isocèle.

2) a/ Vérifier que le point C est un point de cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon 2.

b/ Montrer que la droite (CD) est tangente à ($\mathscr{C}$) en C.

3) On donne le nombre complexe : $z=z_A^3\,z_B$.

a/Donner la forme algébrique de z_A^3 ; puis en déduire la forme algébrique de z.

b/ Donner la forme trigonométrique de z.

c/Déterminer alors les valeurs exactes de: $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 : (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$, $\forall n \geq 0$.

1) a/ Montrer que : $\forall n \geq 0;\ u_n \geq 1$.

b/ Montrer que (u_n) est suite décroissante.

c/ En déduire que (u_n) est convergente est calculer sa limite ℓ.

2) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 3 + \frac{u_n}{u_n - 1}$.

a/ Montrer que (v_n) est une suite arithmétique est préciser sa raison.

b/ Exprimer (v_n) en fonction de n.

c/ En déduire que : $\forall n \geq 0$; $u_n = \frac{n+2}{n+1}$.

Exercice 5 : (5,5 points)

I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x + \sin(\pi x^2), \text{ si } x \in]-\infty,0[\\ \frac{2x^2 - x}{2 - x}, \text{ si } x \in [0;1] \\ 2 - x + \sqrt{x^2 - 1} \text{ si } x \in]1;+\infty[\end{cases}$

1) a/ Étudier la continuité de f en 0 et 1.
b/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

2) a/ Montrer que pour tout $x < 0$; on a : $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.

b/ en déduire : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

3) Montrer que la courbe de f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ à préciser.

II. **1)** Montrer que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ admet dans [–1 ; 1] une seule solution α et justifier que : $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.

2) Soit g la fonction définie par: $g(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{5}{2}x^2 + x + 2$.

a) Dresser le tableau de variations de g sur [–1 ; 1].

b) Montrer que : $g(\alpha) = \frac{5}{6}\alpha(1 - 2\alpha) + 2$.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle [–1;1] une seule solution β.