

Lycée Tahar Sfar Mahdia	<u>Devoir de contrôle n° 1</u> Mathématiques	Niveau : 4 ^{ème} Sc exp1
Date : 12 / 11 / 2018	Prof : Meddeb Tarek	Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (7 pts)

1) a/ Donner la forme algébrique du nombre complexe $(3+i)^2$.

b/ Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} de nombres complexes l'équation :

$$(E): 2z^2 - (1+3i)z - 2 = 0.$$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On désigne par \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1 et on considère les points A et B

d'affixes respectives $z_A = 1+i$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Donner la forme exponentielle de z_A et de z_B .

3) Soit M un point de \mathcal{C} d'argument θ , $\theta \in [0; 2\pi[$.

On considère l'application f qui, à tout point M de \mathcal{C} associe le réel $f(M) = MA \times MB$.

a/ Soit C le point d'affixe i , calculer $f(C)$.

b/ Montrer que pour tout réel α , on a : $e^{2i\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha} \sin \alpha$.

c/ Montrer que, pour tout point M de \mathcal{C} , on a : $f(M) = \left| e^{2i\theta} - 1 - e^{i\theta} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right) \right|$.

d/ En déduire que : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(2\sin\theta - \frac{3}{2} \right)^2}$.

e/ Montrer qu'il existe deux points M_1 et M_2 de \mathcal{C} dont on donnera les coordonnées, pour lesquels le réel $f(M)$ est minimal.

Placer M_1 et M_2 sur le cercle \mathcal{C} .

Exercice n°2 : (6 pts)

On considère la suite U définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) a/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

b/ Montrer que la suite U est décroissante.

c/ En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.

2) Soit V la suite définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{1}{U_n^2}$.

a/ Montrer que V est une suite arithmétique.

b/ En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

3) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

a/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq \sqrt{n}$.

b/ La suite (S_n) est-elle convergente ?

4) Soient (a_n) et (b_n) les suites définies sur \mathbb{N}^* par : $a_n = 2\sqrt{n} - S_n$ et $b_n = a_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

a/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$.

b/ En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

c/ Montrer que la suite (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

d/ Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Que peut-on conclure ?

e/ Déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$.

Exercice n°3 : (7 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x^2} + 2x & \text{si } x \in]-\infty ; 0[\\ \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} & \text{si } x \in]0 ; +\infty[\setminus \{1\} \end{cases}$.

1) a/ Montrer que, pour tout $x \in]-\infty ; 0[$, $f(x) = x \left(2 - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right)$.

b/ Calculer alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x)$.

2) a/ Montrer que, pour tout $x \in]0 ; 1[$, $\frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{-\sqrt{x}}{x-1}$, en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

b/ La fonction f est-elle continue en 0 ? justifier.

3) a/ Vérifier que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[\setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}(x-1)} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}}$.

b/ Déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4) On pose, pour $x \in]0 ; +\infty[\setminus \{1\}$, $u(x) = \frac{1}{x} - 1$ et $v(x) = (x+1) \frac{\sin(\pi x)}{x}$.

a/ Montrer que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[\setminus \{1\}$, $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} = v \circ u(x)$.

(On rappelle que : $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$).

b/ Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1}$.

c/ En déduire que f est prolongeable par continuité en 1.

