MINISTERE DE L' EDUCATION Lycée Feriana ***** Prof : Barhoumi Bechir	2019 ** 2020	DEVOIR DE CONTROLE N°1 ***** MATHÉMATIQUES

Niveau : $4^{ème}$ sciences expérimentales		Coefficient : 3	Durée : 2 heures

❖ Exercice 1 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur IR\ {1} par $f(x) = \frac{1}{x-1}\left(2 - \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)$

1) **a)** Montrer que pour tout $x > 1$; $f(x) \geq \frac{1}{x-1}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

3) La fonction f est-elle prolongeable per continuité en 1 ? Si donner son prolongement F .

4) Montrer que f continue et dérivable sur $]1,+\infty[$ puis Calculer $f'(x)$

❖ Exercice 2 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = (x+2)\sqrt{x-1} - 2$

1) **a)** Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 .

b) Interpréter graphiquement le résultat .

2) **a)** Montrer que f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

b) Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$

c) En déduire que les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 5$ admet chacune une unique solution .

3) Soit α la solution de l'équation f $(x) = 0$.

a) Donner un encadrement de α à 0,25 prés .

b) Démontrer que α est une solution de l'équation $x^3 + 3x^2 - 8 = 0$

c) Montrer que $\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq f'(\alpha) \leq 3$.

❖ Exercice 3 : (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) Déterminer et construire l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|z - i| = |z|$

2) Montrer que si $|z - i| = |z|$ alors $\arg(z - i) + \arg(z) \equiv 0[2\pi]$

3) Soit A le point de E telle que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

a) Construire le point A .

b) Déterminer l'affixe z_A du point A .

c) En déduire la forme trigonométrique de z_A .

❖ Exercice 4 : (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit z un nombre complexe non nul . On désigne par M_1 , M_2 et M_3 les point

d'affixes respectives $z_1 = z$, $z_2 = \frac{i}{z}$ et $z_2 = \frac{i+z^2}{z}$

1) Montrer que $OM_1M_3M_2$ est un parallélogramme .

2) Montrer que $OM_1M_3M_2$ est un losange si et seulement si $|z| = 1$

3) Soit θ un réel de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On suppose que $z = e^{i\theta}$

a) Vérifier que M_1 et M_2 appartiennent au même cercle (C) de centre O et de rayon 1.

b) Montrer que $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

c) En déduire une construction de M_2 et M_3 connaissant M_1

(Prendre $\theta \in \left]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}\right]$ pour la construction)

d) Déterminer le réel θ pour que l'aire du losange $OM_1M_3M_2$ est maximale

Bon