LYCEE EL FAOUAR-KEBELI	DEVOIR DE CONTROLE N°1
Niveau : 4eme SC 1-2	Durée : 2H
Date : 05-11-2019	Année scolaire : 2019/2020
Epreuve : Mathématiques	Professeur : El fekih Nader

Exercice 1 :(7 pts)

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n par :

$z_0 = 1$ et $z_{n+1} = (1 + i\frac{\sqrt{3}}{3})z_n$

On se place dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(o\ ;\vec{u}\ ;\vec{v})$ et on note A_n le point d'affixe z_n

1-a-donner la forme algébrique de z_2

b-vérifier que $1+i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$

c-en déduire la forme exponentielle de z_1 et z_2

2-a-montrer que pour tout entier naturel n :

$$z_n = (\frac{2}{\sqrt{3}})^n e^{in\frac{\pi}{6}}$$

b-montrer que pour tout entier naturel n ,$e^{in\frac{\pi}{6}}$ est reel si et seulement si n est un multiple de 6

c-montrer que $(\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OA_n}) \equiv \arg(z_n)\,[2\pi]$

En déduire en le justifiant les valeurs de n pour lesquelles les points O ;A_0 et A_n sont alignés

3-pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$

a-quelle longueur représente d_n ?

b-calculer d_0 et d_1

c-on admet que pour tout entier naturel n,$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{2}{\sqrt{3}})^n$

Montrer que pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}|^2=|z_n|^2 + {d_n}^2$

d-en déduire que pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

4-construire, en justifiant la construction, a la règle et au campas le point A_5.(Annexe 1)

Exercice 2 :(6 pts)

dans le plan complexe rapporté a un repère orthonormé $(o\,;\vec{u}\,;\vec{v})$

Soit A le point d'affixe $z_A=2+2i$ et Γ le cercle de centre A et de rayon 2.

La droite (OA) coupe Γ en deux points H et K tel que OH<OK

1-montrer que $z_H=(2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_K=(2\sqrt{2}+2)e^{i\frac{\pi}{4}}$

2- a tout point M du plan d'affixe $z\neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z'=\frac{-4}{z}$

a-montrer que pour tout point distinct de O on a :OM.OM'=4

b-montrer que pour tout point distinct de O on a :$(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM'}})\equiv\pi-(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})[2\pi]$

3-soients $z_{H'}$ et $z_{K'}$ les affixes respectifs de H' et K' tels que

$z_{H'}=\frac{-4}{z_H}$ et $z_{K'}=\frac{-4}{z_K}$

a-montrer que :$z_{H'}=(2\sqrt{2}+2)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{K'}=(2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{3\pi}{4}}$

b-construire les points H' et K'. (Justifier). (Annexe 2)

Exercice 3 (7 pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\frac{1+\sqrt{x}\cos(x)}{x+2} & \text{si } x\geq 0\\ \frac{x^2}{4(\sqrt{x^2+1}-1)} & \text{si } x<0\end{cases}$

1-a-montrer que f est continue en 0

b-en déduire $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{\cos^2(x)}{4(\sqrt{\cos^2(x)+1}-1)}$

2-a-montrer que pour tout réel x positif, on a :$\frac{1-\sqrt{x}}{x+2}\leq f(x)\leq\frac{1+\sqrt{x}}{x+2}$

b-en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.interpréter graphiquement le résultat.

3-enoncer le théorème des valeurs intermédiaires puis montrer que l'équation f(x)=0 admet au moins une solution $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

4−la courbe en annexe (3) représente une fonction **g** dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\mathbf{0}\}$ et qui admet la droite D : **y=1** comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et une branche parabolique de direction **(oy)** au voisinage de $-\infty$

a−à l'aide d'une lecture graphique :

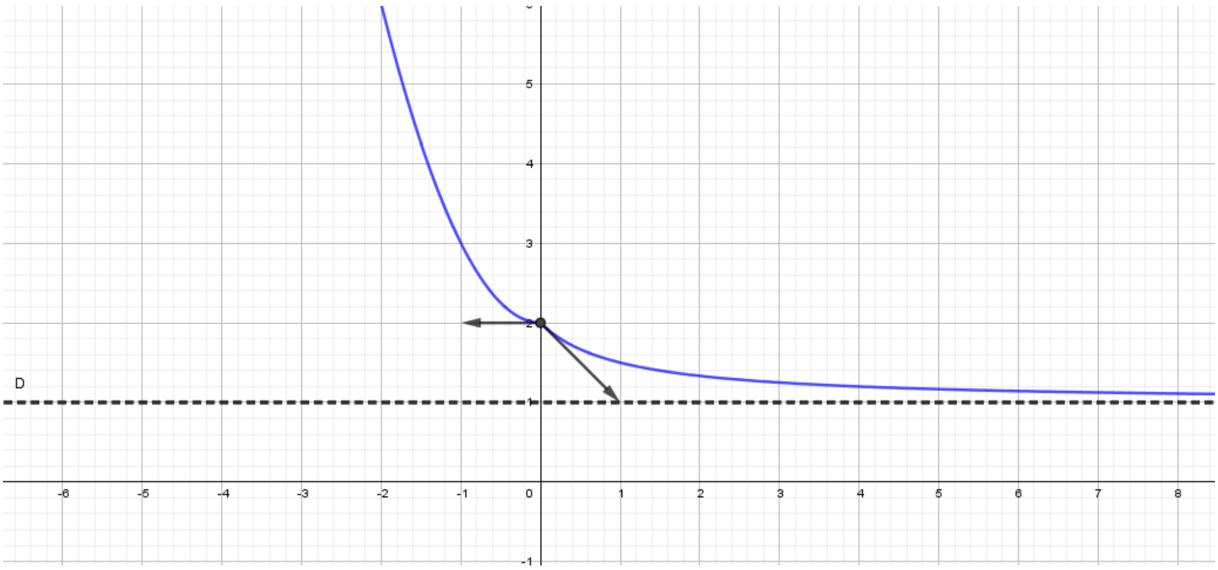
−dresser le tableau de variation de **g** et préciser **g** ($\mathbb{R}$)

−prouver que l'équation **g(x)=α** admet une unique solution $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$

b−calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2019^-} g\left(\frac{3x}{2019-x}\right)$

c−démontrer que $\mathbf{tg}\ (g(\beta))=-\sqrt{\alpha-1}$

Annexe 3 :

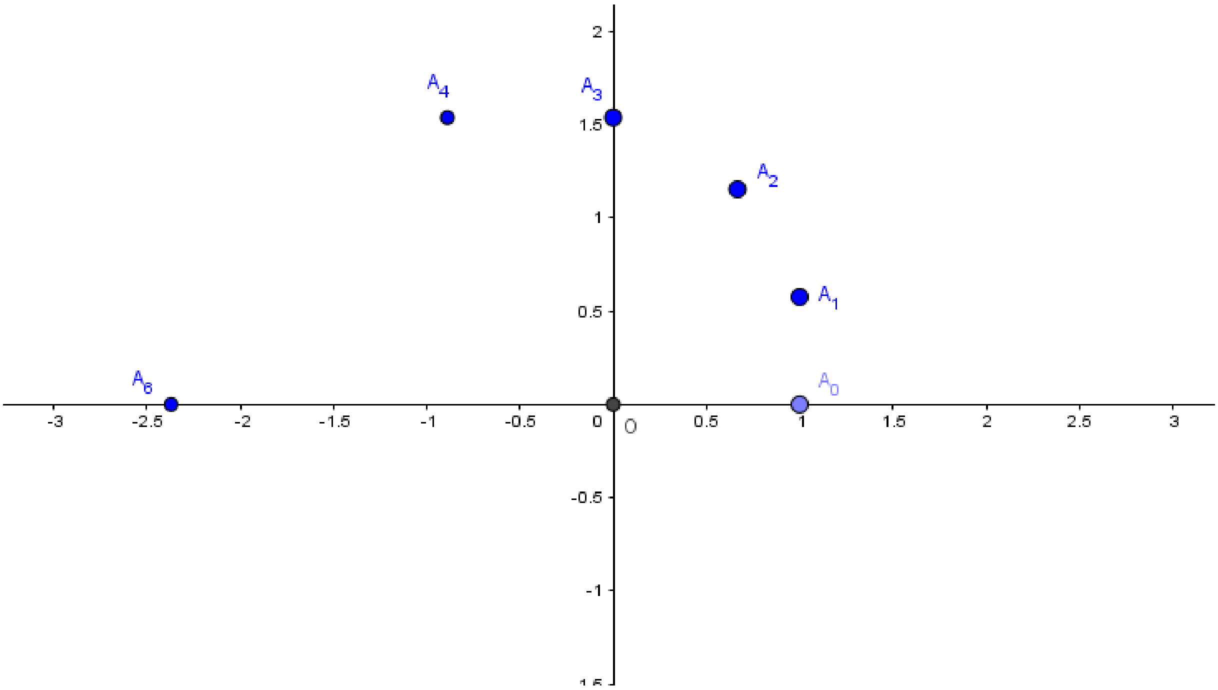


☺ ☺ ☺BON TRAVAIL ☺ ☺ ☺

Annexes

Nom et prénom :……………………………………….

Annexe 1 :



Annexe 2 :