

Prof : Fehri Bechir

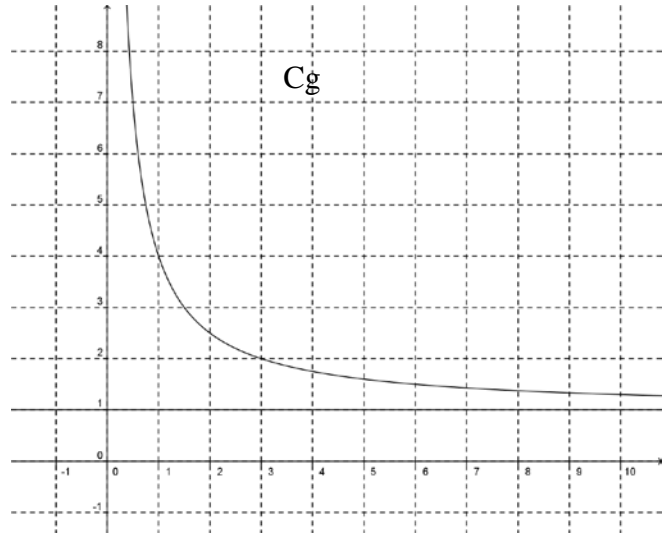
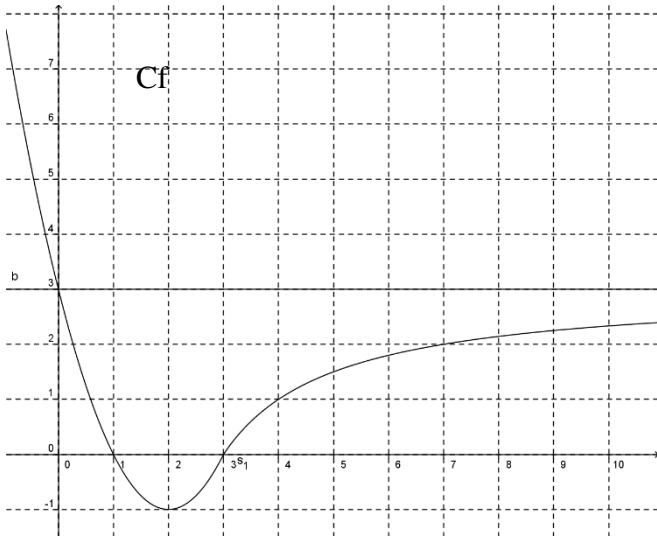
Devoir de contrôle N°1

MATHEMATIQUES

4ème Sc 1&2

Exercice N°1: (5 pts)

On donne la fonctions f définie sur \mathbb{R} , et la fonction g définie sur $] 0 , + \infty[$ dont les courbes représentatives Cf et Cg ci dessous .



1/ Compléter

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots\dots\dots$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \dots\dots\dots$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots\dots$
 $f(4) = \dots\dots\dots$ $g(1) = \dots\dots\dots$

La fonction f admet un minimumen de valeur

2/ Soit la fonction définie sur $] - \infty, 1[\cup] 3, +\infty[$ par $h(x) = g \circ f(x)$.

b- Calculer $h(4) = \dots\dots\dots$ $h(0) = \dots\dots\dots$

c- Calculer

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \dots\dots\dots$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \dots\dots\dots$ $\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = \dots\dots\dots$

3/ Déterminer $f(] - \infty, 0[) = \dots\dots\dots$ $g(] 3, +\infty[) = \dots\dots\dots$

$h(] - \infty, 0[) \dots\dots\dots$ $h(] 0, 1[) = \dots\dots\dots$

Exercice N° 02(5points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{x} \cos x}{x + 2} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{4(\sqrt{x^2 + 1} - 1)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue en 0
- 2) a/ Montrer que pour tout réel positif x on a : $\frac{1 - \sqrt{x}}{x + 2} \leq f(x) \leq \frac{1 + \sqrt{x}}{x + 2}$
b/ En déduire la limite de $f(x)$ en $+\infty$
- 3) Déterminer, en justifiant la réponse, les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(1 - \sin x)$
- 4) a/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ une solution qu'on notera α
b/ Montrer que $\tan(\alpha) = -\sqrt{\alpha - 1}$

Exercice N° 03(5points)

- 1-a/ Vérifier que : $(1 + \sqrt{3} + 2i)^2 = 2\sqrt{3} + 4i(1 + \sqrt{3})$
b/ Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - (3 + \sqrt{3})z + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - i) = 0$ et mettre les solutions sous forme algébrique
- 2-Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (unité graphique 2cm) on considère les points $A; B$ et Ω d'affixes respectives $z_A = 1 - i$
 $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ et $z_\Omega = 2$
Soit ζ le cercle de centre Ω et de rayon 2
- a/ Vérifier que $B \in \zeta$
b/ Placer les points A et Ω . Construire alors le point B
- 3-a/ Ecrire z_A sous forme exponentielle
b/ Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique
c/ Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

- d/ En déduire la forme exponentielle de z_B
e/ Déterminer alors la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice N° 04(5points)

Soit la fonction f définie sur $[-2, +\infty[$ par : $f(x) = x-1 + \sqrt{x+2}$.

- 1) a) Montrer que f est continue sur $[-2, +\infty[$.
b) montrer que f est strictement croissante sur $[-2, +\infty[$.
- 2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $] -1, 0[$ une unique solution α .
b) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
- 3) donner le signe de $f(x)$ sur $[-1, 0]$.
- 4) a) Montrer que : $\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0$
b) En déduire la valeur exacte de α .
- 5) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(x^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{x}\right)\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1}\right)$