

*N.B : L'épreuve comporte deux pages. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Le barème est approximatif.*

Exercice 1 (3,5 pts)

I- Indiquer la réponse exacte :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est égale à :

a/ 0

b/ 1

c/ $+\infty$

2) Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)$ est égale à :

a/ 1

b/ 0

c/ $+\infty$

3) $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ est une racine cubique de :

a/ i

b/ $-i$

c/ -1

4) Si z_1 et z_2 sont les solutions dans \mathbb{C} de l'équation : $-iz^2 + (1+i)z + (1-i) = 0$.

Alors $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \dots$:

a/ $\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

b/ $\frac{\pi}{4}[2\pi]$

c/ $-\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

II- Répondre par **vrai** ou **faux** en **justifiant** la réponse :

1) Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et telle que : $\frac{1}{2+x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x}$; alors :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 1$.

2) L'équation : $\cos x = x$ admet une unique solution α telle que : $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Si a est une solution de l'équation $(E) : z^n = 1$, alors \bar{a} est une solution de (E) .

Exercice 2 (5 pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1 - \cos(x)}{x^2}, & \text{si } x < 0 \\ 2x + \sqrt{x^2 + \frac{9}{4}}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

1) a- Montrer que pour tout $x < 0$, on a : $0 \leq f(x) - 1 \leq \frac{2}{x^2}$.

b- En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) a- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$.

b- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{3}{2}$.

c- f est-elle continue en 0. Conclure.

3) a- Justifier la continuité de f sur $[0; +\infty[$.

b- Montrer que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

c- Déterminer $f([0 ; 2])$. En déduire que l'équation : $2f(x) - 7 = 0$ admet une unique solution $\beta \in [0 ; 2]$.

Exercice 3 (4,5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un R.O.N.D (O, \vec{u}, \vec{v}) . On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 1+i$; $z_B = \sqrt{3}+i$; $z_C = 1-i\sqrt{3}$ et $z_D = (\sqrt{3}+1)+i(1-\sqrt{3})$.

- 1) a/ Écrire la forme exponentielle de z_A , z_B et z_C .
 b/ Placer les points A, B et C dans le repère considéré.
 c/Montrer que OBC est un triangle rectangle isocèle.
- 2) a/ Vérifier que le point C est un point de cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon 2.
 b/ Montrer que la droite (CD) est tangente à (\mathcal{C}) en C .
- 3) On donne le nombre complexe : $z = z_A^3 z_B$.
 a/ Donner la forme algébrique de z_A^3 ; puis en déduire la forme algébrique de z .
 b/ Donner la forme trigonométrique de z .
 c/ Déterminer alors les valeurs exactes de : $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 (3,75 pts)

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 3iz - 2 = 0$.
- 2) a- Soit $f(z) = z^3 - 5iz^2 - 8z + 4i$; Montrer que $z_0 = 2i$ est une solution de $f(z)$.
 b- Trouver le polynôme $g(z) = \alpha z^2 + \beta z + \lambda$ tel que $f(z) = (z - 2i)g(z)$.
 c- Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$.
- 3) Soit θ un réel de $]0 ; 2\pi[$ et soit l'équation : $(E_\theta) : z^2 + i(e^{i\theta} - 2)z + e^{i\theta} - 1 = 0$.
 a- Trouver une racine carrée du nombre complexe $-e^{i2\theta}$.
 b- Résoudre alors l'équation (E_θ) .

Exercice 4 (3,25 pts)

Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $u_n = \frac{n+1}{4^n}$, $n \geq 0$.

- 1) a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$.
 b- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Calculer alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$.

c- Soit (S_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Montrer que (S_n) est une suite croissante et déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq 2$.