Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 1** Mathématiques	Niveau : 4 ^{ème} Sc exp$_1$
Date : 04 / 11 / 2019	Prof : Meddeb Tarek	Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (4 pts)

Soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

On pose $Z=\left(1+i\sqrt{3}\right)+\left(i-\sqrt{3}\right)\tan\theta$.

1) $a/$ Montrer que $Z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\cos\theta}\right).e^{i\theta}$.

$b/$ Donner la forme exponentielle de Z.

2) On prend dans la suite $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

$a/$ Montrer que $Z=2\sqrt{2}ie^{i\frac{\pi}{12}}$.

$b/$ En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice n°2 : (7 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$. (*voir feuille annexe*).

1) Soit A le point d'affixe $a=1+i\sqrt{2}$.

$a/$ Montrer que A appartient à $\mathscr{C}$.

$b/$ Placer le point A.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-2i\sqrt{3}.z-6i\sqrt{2}=0$.

$a/$ Vérifier que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $12a^2$.

$b/$ En déduire que les solutions de (E) sont :

$$z_1=\sqrt{3}\left[-1+i\left(1-\sqrt{2}\right)\right] \text{ et } z_2=\sqrt{3}\left[1+i\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$$

3) On considère le point K d'affixe $z_K=i\sqrt{3}$ et on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

$a/$ Vérifier que K est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

$b/$ Montrer que $\dfrac{z_2-z_1}{a}=2\sqrt{3}$. En déduire que (M_1M_2) et (OA) sont parallèles.

$c/$ Montrer que $M_1M_2=6$.

$d/$ Placer le point K et construire les points M_1 et M_2.

Exercice n°3 : *(9 pts)*

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & si\ x\in\left]-\infty;1\right[\\ \sqrt{x^2+x+2}-x & si\ x\in\left[1;+\infty\right[\end{cases}$.

1) $a/$ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$.

   $b/$ Montrer que, pour tout $x\in\left]-\infty;1\right[$, $\dfrac{x+1}{x-1}\le f(x)\le 1$, en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) $a/$ Vérifier que, pour tout $x\in\left]-\infty;1\right[$, $\dfrac{1+\cos(\pi x)}{x-1}=\dfrac{1-\cos(\pi(x-1))}{x-1}$.

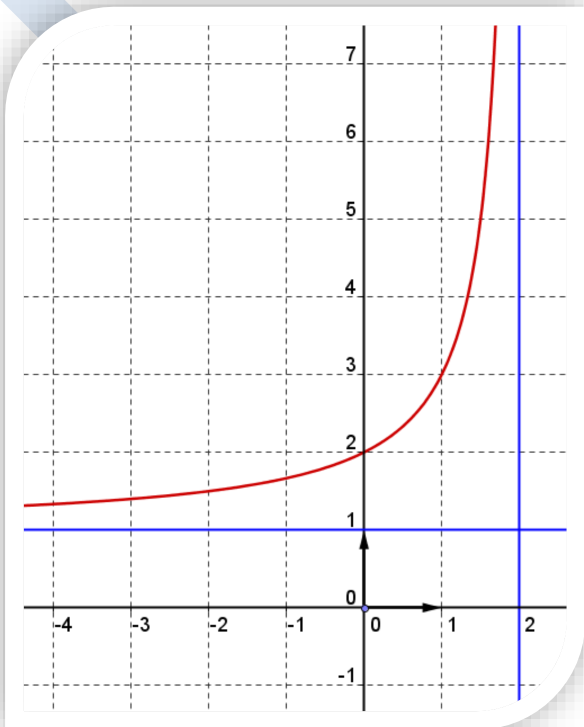
   En déduire $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1+\cos(\pi x)}{x-1}$. (On pourra poser $u(x)=\pi(x-1)$).

   $b/$ Montrer que f est continue en 1.

3) $a/$ Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$.

   $b/$ Montrer que $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{1-\alpha^2}$.

4) La courbe C_g ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g continue sur $\left]-\infty;2\right[$, les droites d'équations : $y=1$ et $x=2$ sont les asymptotes de C_g .



   $a/$ Déterminer les limites suivantes :

   $\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ g(x)$.

   $b/$ Soit h la fonction définie sur $\left]-\infty;2\right]$ par :

$$\begin{cases}h(x)=f\circ g(x) & si\ x\in\left]-\infty;2\right[\\ h(2)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

   Montrer que h est continue sur $\left]-\infty;2\right]$.

Bonne chance

Devoir de contrôle n°1 (04 / 11 / 2019)

Nom et prénom : ………………………………………………………................. *Classe : 4 ème Sc exp 1*