Devoir de contrôle 1

Date: Novembre 2022 Classe : $4^{ème}$ S.Exp

Exercice n°1 6 pts

Le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.on désigne par **A** et **B** les points d'affixes respectives **i** et **-i** .

Soit **f** l'application de **P\{B}** dans P qui à tout point **M** d'affixe **z** distincts de **-i** associe le point M'=f(M) d'affixe $\mathbf{z'} = \frac{\mathbf{i-z}}{\mathbf{iz-1}}$

1.a-Montrerque $\mathbf{OM'} = \frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{BM}}$ $\mathbf{et}(\widehat{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{OM'}}}) \equiv (\widehat{\vec{\mathbf{BM}}, \vec{\mathbf{AM}}}) + \frac{\pi}{2}(2\pi)$

b-Montrer que si $|\mathbf{z}| = \mathbf{1}$ $et\ z \neq i$ **, alors z'est un réel.**

c-Montrer que <u>si z est réel</u> alors $|\mathbf{z'}| = \mathbf{1}$

d-Soit $\mathbf{F} = \left\{\mathbf{M} \in \mathbf{P} / \ \frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{BM}} = \sqrt{2}\right\}$**et** $\mathbf{G} = \left\{\mathbf{M} \in \mathbf{P} / \ (\widehat{\vec{\mathbf{BM}}, \vec{\mathbf{AM}}}) = -\frac{\pi}{4}(2\pi)\right\}$

Montrer que F et G ont un seul point commun d'affixe $z_0 = 2 - i$

2. Soit l'équation (E) : $\left(\frac{\mathbf{i-z}}{\mathbf{iz-1}}\right)^4 = -4$

a-Montrer z_0 est une solution de **(E)**.

b-Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation **(E)**.

Exercice n°2 5pts

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et $\mathbf{U_{n+1}} = \frac{\mathbf{U_n}}{\sqrt{\mathbf{1+2U_n}}}$

1.a-Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n \leq 1$

b- Montrer que la suite U est convergente et calculer sa limite .

2.Soit V la suite définie par $\mathbf{V_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{U_{n+1}}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{U_n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On considère la fonction f définie par $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1+\sqrt{1+2x}}}$

a-Vérifier que pour tout n , $\mathbf{V_n} = \mathbf{f(U_n)}$.

b- En déduire que la suite V est convergente et donner sa limite.

3.Soit w la suite définie sur $\mathbb{N}$ $\mathbf{w_n} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n}} (\mathbf{-1})^{\mathbf{k}} \mathbf{u_k}$

a- Montrer que (w_{2n}) est décroissante et que (w_{2n+1})est croissante.

b- En déduire que la suite (w_n) est convergente.

Exercice n°3 6pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & si\ x<1\\ \sqrt{x^2+x+2}-x & si\ x\geq 1\end{cases}$$

1.**a-** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ et interpréter le résultat graphiquement

b- Montrer que pour tout x< 1 ; $\frac{x+1}{x-1}\leq f(x)\leq 1$

c-Déduire. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

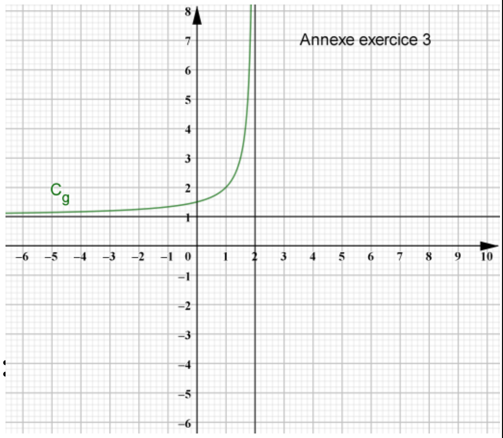
2.**a-**Montrer que pour tout x< 1 $\frac{1+\cos(\pi x)}{x-1}=\frac{1-\cos(\pi(x-1))}{x-1}$

b- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ (on pourra poser $U(x)=\pi(x-1)$)

c-Montrer que f est continue en 1.

3.a- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $\left]-\frac{1}{2},0\right[$

b-Montrer que $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{1-\alpha^2}$



4. On donne la courbe C_g graphique de la fonction g continue sur $]-\infty,2[$.

Les droites x=2 et y=1sont les asymptotes à C_g

a-Déterminer les limites suivantes:

$\lim\limits_{x\to-\infty} go\,f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} fo\,g(x)$

b – Soit la fonction h définie sur $]-\infty,2[$ par

$$h(x)=\begin{cases}(fog)(x) & si\ x<2\\ \frac{1}{2} & si\ x=2\end{cases}$$

Montrer que h est continue sur $]-\infty,2]$

Exercice n°4 3pts

Choisir la bonne réponse

1)Soit z un nombre complexe de module 2 , le conjugué de z est :

a. $\frac{2}{z}$ **b .** $\frac{4}{z}$ **c.** $\frac{1}{2z}$

2).la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x-co(3x)$. La limite de f en $-\infty$ est :

a. $-\infty$ b . 0 c. $+\infty$

3). La suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n=1+2\times(-0,7)^n$

a.converge vers3 b.converge vers 1 c.converge vers0

d. tend vers-∞