Prof : Dhahbi . A	Devoir de synthèse n° 1	Section : 4eme Sciences . exp
L . A . A	Mathématique	Durée : 3h ; Date : 11 / 12/ 2002

EXERCICE N° 1 :

Soit θ un réel de $]0,\pi[$. On considère dans C l'équation (E) : $z^3 - 4z^2 + (5 - e^{2i\theta})z - 2 + 2e^{2i\theta} = 0$.

1°/ a) Vérifier que $z_0 = 2$ est une solution de l'équation (E) .

b) Trouver alors les deux autres solution z_1 et z_2 de l'équation (E) avec ($\mathrm{Im}\, z_1$) > 0 .

c) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle .

2°/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A , M_1 et M_2 d'affixes respectives 2 , $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$.

a) Montrer que **M_1 et M_2** sont symétriques par rapport à un point fixe I que l'on précisera .
b) Déterminer l'ensemble décrit par les points **M_1 et M_2** quand θ varie .

3°/ On suppose dans cette question que $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. Montrer que le quadrilatère OM_1AM_2 est un rectangle non carré .

EXERCICE N°2 :

Soit $f(x) = 2 - \sin\frac{x}{2}$, $x \in [-\pi, \pi]$.

1°/ a) Montrer que f est une bijection de $[-\pi, \pi]$ sur $[1, 3]$.

b) Calculer $f^{-1}(\frac{5}{2})$, $f^{-1}(2)$.

2°/ a) Montrer que pour tout $x \in]1, 3[$.

b) Calculer $(f^{-1})'(\frac{5}{2})$, $(f^{-1})'(2)$.

c) Montrer que pour tout $x \in]1, 3[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{-2}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

3°/ Dans Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$; Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$.

EXERCICE N°3 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2\left(x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$.

1°/ Montrer que f est impaire et dresser son tableau de variation .

2°/ On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer les asymptotes à (C) et étudier la position relative de (C) par rapport à son asymptote oblique .
b) Déterminer les points d'inflexion de (C) .
c) Construire (C) .

3°/ Soit g la fonction définie sur $]0, \pi[$ par $g(x) = f(\sin x)$.

a) Etudier g et dresser son tableau de variations .
b) Montrer que la courbe (Γ) de g possède $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie .
c) Construire (Γ) .

Bon courage

Prof : Dhahbi . A	Devoir de contrôle n° 1	Section : 4^{eme} Sc .exp
L . A . A	Mathématique	Durée : 2h ; Date : 02 / 11 / 2001

EXERCICE N°1 :.

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On donne les points A (2i) , B(2) et I = A * B (unité : 2cm)
On considère la fonction f qui à tout point M distinct de A , d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{2z}{z-2i}$.

1°/ a) Montrer que f admet comme point invariants le point O et un deuxième point dont on précisera l'affixe .

b) Déterminer les images par f des points B et I .

2°/ Soit M un point quelconque distinct de A et de O .

Etablir que : $\begin{cases} (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ OM' = 2\frac{MO}{MA} \end{cases}$

3°/ Soit Δ la médiatrice de [OA] ;
Montrer que les transformations par f des points de (Δ) appartiennent à un cercle (C) que l'on précisera

4°/ Soit (Γ) le cercle de diamètre [OA] , privé du point A , Montrer que les transformés par f des points de (Γ) appartiennent à une droite (D) que l'on précisera .

5°/ Tracer (Δ) , (Γ) , (C) et (D) sur une même figure .

EXERCICE N°2 :

Soit $z = -1 - i$; $z' = -1 + i\sqrt{3}$; $Z = \frac{z}{z'}$.

1°/ Ecrire chacun des nombres complexes z, z' et Z sous forme trigonométrique.

2°/ En déduire $\cos\frac{7\pi}{12}$, $\sin\frac{7\pi}{12}$.

EXERCICE N°3 :

Déterminer le domaine de définition de f et étudier la limite de f en x_0 dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$, $x_0 = 0$

b) $f(x) = \frac{mx^2+(m-1)x-1}{x^2-1}$, $x_0 = +\infty$ puis $x_0 = 1$; discuter suivant le paramètre réel m .

c) $f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$, $x_0 = 0$

EXERCICE N°4 :

Soit la fonction f : IR → IR

$$x \to \begin{cases} f(x) = \sqrt{4-x^2} & \text{si } x \in [-2, 2] \\ f(x) = \frac{2x^2+8x+8}{x^2-4} & \text{si } x < -2 \\ f(x) = x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur son domaine de définition .

Bon courage

Prof : Dhahbi . A	Devoir de contrôle n° 1	Section : 4^{eme} Maths 2
L . A . A	Mathématique	Durée : 2h ; Date : 03 /11 / 2004

EXERCICE N°1 :.

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On donne les points A et B d'affixes respectives 1 et – i ,
On considère la fonction f qui à tout point M distinct de B , d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1-z}{1-iz}$.

1°/ Déterminer l'ensemble E_1 des points M pour lequel z' soit réels.
2°/ Déterminer l'ensemble E_2 des points M pour lequel $|z'| = 1$.
3°/ a) Montrer que $\forall z \in C \setminus \{-i\}$, on a : $z' + 1 = \frac{-1+i}{z+i}$.

b) En déduire que $BM . BM' = \sqrt{2}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) \equiv \frac{3\pi}{4}$ [2π] .

c) Montrer que si M appartient au cercle C de centre B et de rayon 1 alors le point M' appartient à un cercle C' que l'on déterminera .

d) Montrer que si M appartient à la droite D d'équation $y = x - 1$ alors le point M' appartient à une droite D' que l'on déterminera

Exercice N°1

A/ Soit f la fonction par $f(x) = \sqrt{\cot g \frac{\pi}{2} x}$, $x \in]0,1]$

1°/a) Etudier la derivabilité de f en 1
b) Calculer f'(x) pour $x \in]0,1[$
c) Montrer que f réalise une bijection de]0 ,1] sur un intervalle J que l'on precisera.

2°/ Construire dans un repère R $(o, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes C_f et C_f^{-1} [Ind : calculer $f(\frac{1}{2})$]

3°/a) Montrer que f^{-1} est derivable sur$]0,+\infty[$ et $x \in]0,+\infty[$, $(f^{-1})'(x) = -\frac{4x}{\pi(1+x4)}$

b) Montrer que f^{-1} est derivable en 0^+ et que $(f^{-1})'d^{(0})=0$

4°/ On pose $C(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}(\frac{1}{x})$, $x \in]0,+\infty[$

a) Montrer que C est derivable sur$]0,+\infty[$ et calculer $\ell'(x)$

b) En deduire que $\forall x \in]0,+\infty[$, (x) =1

5°/ On pose $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$,$x \in]0,+\infty[$
Etudier les variations de g et tracer (g)
B/ Soit la suite (U_n)definie par

Prof : Dhahbi . A	Devoir de contrôle n° 2	Section : 4^{eme} Sciences . exp
L . A . A	Mathématique	Durée : 2h ; Date : 10 / 02/ 2005

EXERCICE :

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé R (o , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) .

On considère les plans P : 2x - y + 2 z – 5 = 0 ; P' : 2x + 2 y – z – 4 = 0 .

1°/ Montrer que les plans P et P' sont perpendiculaires .

2°/ a) Calculer les distances d (A , P) et d (A , P') avec A (1 , 2 , - 1) .

b) En déduire la distance du point A à la droite D intersection de P et P' .

3°/ Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (D) .

4°/ a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à la droite (D) .

b) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur la droite (D) .

c) Déterminer , par ses coordonnées , le point M de la droite (D) pour lequel la distance AM est minimale .

PROBLEME :

A - Soit g la fonction numérique définie sur] 0 , + ∞ [par g (x) = Log (x) + x – 3 .

1°/ Etudier les variations de g .

2°/ a) Montrer que l'équation g (x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle] 0 , + ∞ **[.**

b) Vérifier que : 2,20 $\prec$ α $\prec$ 2,21 .

3°/ Etudier le signe de g (x) sur] 0 , + ∞ [.

B- On considère la fonction numérique f définie sur] 0 , + ∞ [par f (x) = (1 - $\frac{1}{x}$) (Log x – 2) .

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

1°/ Déterminer les limites de f à droite en 0 et en + ∞ **.**

2°/ Montrer que f est dérivable sur] 0 , + ∞ [et calculer f '(x) .

3°/ a) Etudier les variations de f .

b) Exprimer Log (α) en fonction de α .

c) Montrer que f (α) = - $\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

d) En déduire un encadrement de f (α)d'amplitude 2 . 10^{-2}

4°/ a) Etudier le signe de f (x) sur] 0 , + ∞ [.

b) Etudier la branche infinie de la courbe (C) .

c) Tracer la courbe (C) .

C- Soit F la primitive de f sur] 0 , + ∞ [qui s'annule pour x = 1 .

On appelle (Γ) la courbe représentative de F dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

1°/ a) Sans calculer F (x) , étudier le sens de variation de F sur] 0 , + ∞ [.

b) Que peut on dire des tangentes à en ses points d'abscisse 1 et e^2 .

2°/ Vérifier que pour tout x strictement positif , F (x) = - $\frac{1}{2}$ (Logx)^2 + (x + 2) Logx – 3x + 3 .

3°/ a) Déterminer la limite de F en 0^+

b) Montrer que , pour tout x $\succ$ 1 , F (x) = x Log x (1 - $\frac{1}{2}.\frac{Logx}{x}$ + $\frac{2}{x}$ - $\frac{3}{Logx}$) + 3 .

En déduire la limite de F en + ∞ **.**

c) Dresser le tableau de variation de F .

d) Etudier la branche infinie de la courbe (Γ) .

e) Tracer la courbe (Γ) sur le même graphique que (C) .

Bon courage

EXERCICE N° 1 :

Soit θ un réel de $]0, \pi[$. On considère dans C l'équation (E) : $z^3 - 4z^2 + (5 - e^{2i\theta})z - 2 + 2e^{2i\theta} = 0$.

1°/ a) Vérifier que $z_0 = 2$ est une solution de l'équation (E) .

b) Trouver alors les deux autres solution z_1 et z_2 de l'équation (E) avec $(\mathrm{Im}\, z_1) > 0$.

c) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle .

2°/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A , M_1 et M_2 d'affixes respectives 2 , $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$.

c) Montrer que **M_1 et M_2** sont symétriques par rapport à un point fixe I que l'on précisera .

d) Déterminer l'ensemble décrit par les points **M_1 et M_2** quand θ varie .

3°/ On suppose dans cette question que $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. Montrer que le quadrilatère OM_1AM_2 est un rectangle non carré .

EXERCICE N°2 :

Soit $f(x) = 2 - \sin\frac{x}{2}$, $x \in [-\pi, \pi]$.

1°/ a) Montrer que f est une bijection de $[-\pi, \pi]$ sur $[1, 3]$.

b) Calculer $f^{-1}(\frac{5}{2})$, $f^{-1}(2)$.

2°/ a) Montrer que pour tout $x \in]1, 3[$.

b) Calculer $(f^{-1})'(\frac{5}{2})$, $(f^{-1})'(2)$.

c) Montrer que pour tout $x \in]1, 3[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{-2}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

3°/ Dans Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$; Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$.

EXERCICE N°3 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x}$.

1°/ Montrer que la fonction f est définie sur $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

2°/ Etudier la continuité de f sur $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

3°/ Etudier la dérivabilité de f en tout point de $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

Interpréter géométriquement le résultat obtenue .

4°/ a) Etudier les variations de f .

b) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé R $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5°/ a) Montrer que f réalise une bijection de $[2, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera .

b) Expliciter : $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

c) Tracer la courbe représentative (C') de f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Bon courage

Prof : Dhahbi . A	**Devoir de contrôle n° 3**	**Section : 4^{eme} Economie et gestion**
L . P . A	**Mathématique**	**Durée : 2h ; Date : 29 / 04/ 2003**

EXERCICE N°1 :

Une urne contient cinq boules rouges , une boule noire et trois boules blanches .Les boules sont indiscernables au toucher .

On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne .

1°) Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « n'obtenir aucune boule rouge »

B : « obtenir une boule de chaque couleur »

C : « obtenir au moins une boule rouge »

2°/ Soit X l'aléa numérique qui associe , à chaque tirage de trois boule de l'urne le nombre de boule rouges obtenues .

a) Déterminer la loi de probabilité de X .
b) Calculer son espérance mathématique E(X) , sa variance et son écart - type .
c) Déterminer et représenter sa fonction de répartition F .

3°/ On répète ce tirage 5 fois de suite en remettant à chaque fois les trois boules tirées dans l'urne .

Quelle est la probabilité de l'évènement suivant :

« lors de 5 tirages deux fois seulement , on n'obtient aucune boule rouge »

EXERCICE N° 2 :

I – Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\text{Log}x + 2$.

a) Etudier les variations de la fonction g

b) Calculer g (1) et en déduire le signe g (x) pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.

II - Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2\text{Log}x}{x} + x - 1$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.(unité :2cm)

1°/ a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, interpréter géométriquement le résultat obtenu

c) Montrer que , pour tout réel x strictement positif , $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

d) En déduire le signe de f '(x) puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

2°/ a) Montrer que la droite D d'équation y = x – 1 est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la position de (C) par rapport à D .

c) Tracer (C) la courbe représentative de f et D dans le repère$(O,\vec{i},\vec{j})$.

3°/ a) Montrer que f est une bijection de l'intervalle $]0,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser .

c) Tracer la courbe représentative (C') de f^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°/ Soit la fonction h définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $h(x) = (\text{Log}x)^2$.

a) Déterminer la fonction dérivée de h .
b) Calculer l'aire de la partie du plan limité par (C) , D et les droites d'équations x = 1 et x = 2

Bon courage

Prof : Dhahbi . A	Devoir de synthèse n° 3	Section : 4[eme] Economie et gestion
L . S . A	Mathématique	Durée : 3h ; Date : 13 / 05/ 2003

EXERCICE N° 1 : (6 points)

On considère , dans C l'ensemble des nombres complexes , l'équation :

$$(E) : z^3 – (5 + i) z^2 + 4(2 – i) z – 12 + 4i = 0$$

1°/ a) Vérifier que $z_0 = -2i$ est une solution de l'équation (E) .

b) Déterminer les nombres complexes a , b , c telque , pour tout nombre complexe z :

$$z^3 – (5 + i) z^2 + 4(2 – i) z – 12 + 4i = (z + 2i) (a z^2 + b z + c) = 0 .$$

c) Résoudre l'équation (E) .

2°/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (0 , $\vec{u}$, $\vec{v}$) , on considère les points A , B , C et I d'affixes respectives : $z_A = -2i$; $z_B = 1+i$; $z_C = 4+2i$ et $z_I = 2$.

a) Placer sur une figure les points A , B , C et I .

b) Vérifier que I est le milieu du segment [AC] .

3°/ a) Calculer les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle de sommet principale B .

4°/ Soit D le symétrique de B par rapport au point I .

a) Déterminer l'affixe z_D de point D

b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un losange .

EXERCICE N°2 (6points)

Une urne contient : cinq boules rouges numérotés : -1 , -1 , 1, 1 , 0 .
et quatre boules blanches numérotés : -1 , 1 , 1 , 1 .

Les boules sont indiscernables au toucher .

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne .

1°/ Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « obtenir trois boules de même couleurs »

B : « obtenir une seule boule portant le nombre -1 »

2°/ Soit l'événement C : « obtenir un produit des nombres marqués , égal à 0 »

Montrer que $p (C) = \frac{1}{3}$

3°/ Soit X l'aléa numérique qui associe , à chaque tirage de trois boules de l'urne la somme des nombres marqués sur les trois boules .

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer son espérance mathématique E(X) , sa variance et son écart - type .

3°/ On répète ce tirage 4 fois de suite en remettant à chaque fois les trois boules tirées dans l'urne . Soit Y l'aléa numérique qui associe le nombre de réalisations de l'événement C au cours de ce quatre épreuves .

a) Déterminer la loi de probabilité de Y .

b) Calculer son espérance mathématique E(Y) , sa variance et son écart – typ

PROBLEME :(8points)

A – Soit la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x(1 - \text{Log}(x)) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 .

2°/ a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation .

3°/ a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point d' abscisse e .

b) Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction$(O\,\vec{j})$

c) Soit $g(x) = f(x) - x$ .Etudier les variations de g sur IR^+ puis en déduire le signe de g sur IR^+

d) Construire la courbe (C) de f , dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5°/ Soit h la restriction de f à $[1, +\infty[$.

a) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser .

b) Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J et calculer $(h^{-1})'(0)$

c) Construire la courbe de (C') de h^{-1} dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6°/ a) Calculer en intégrant par parties : $I_\alpha = \int_\alpha^e x\text{Log}x \, dx$ où $\alpha \in IR^*_+$.

b) Calculer : $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} I_\alpha$.

c) En déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C) et l'axe des abscisses .

7°/ Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout n de IN on a : $0 < U_n \leq 1$

b) Montrer que U_n est croissante .

c) En déduire que U_n est convergente et calculer sa limite .

Bon courage

Prof : Dhahbi . A	***Devoir de contrôle n° 2***	***Section : 4eme Science . exp***
L . P . A	***Mathématique***	***Durée : 2h ; Date : 02 / 02/ 2004***

EXERCICE :

Partie A :

Soit g la fonction définie sur I =] 0 , +∞ [, par : $g(x) = x^2 - 2 + \text{Log}(x)$.

1°/ Etudier les variations de la fonction g

2°/ Montrer que l'équation g (x) = 0 admet dans IR_+^* une solution unique α .

3°/ Vérifier que : $\alpha \in \,]1{,}31 ; 1{,}32[$

4°/ En déduire le signe de g (x) sur I =] 0 , +∞ [.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur] 0 , +∞ [, par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{1 - Logx}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

b) Interpréter ce résultat géométriquement .

2°/ a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que f est dérivable sur] 0 , +∞ [et déterminer f '(x) .

c) Vérifier que f '(x) à le même signe que g (x) .

d) En déduire le tableau de signe de f .

e) Vérifier que : $f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \dfrac{1}{\alpha}$.

3°/ a) Montrer que la droite Δ d'équation y = x + 1 est une asymptote oblique à la courbe (C) .

b) Montrer que la droite Δ coupe (C) en un point A que l'on déterminera .

c) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à Δ .

4°/ Déterminer le point de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à Δ

5°/ Construire la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6°/ Déterminer une primitive F de f sur] 0 , +∞ [qui s'annule en 1 .

Partie C :

1°/ Soit la fonction φ définie sur] 0 , +∞ [par $\varphi(x) = f(x) - x$.

a) Etudier les variations de φ .

b) Déduire que pour tout x de] 0 , +∞ [, $\varphi(x) > \dfrac{1}{2}$.

2°/ Soit la suite u définie sur IN par $u_0 = 2$ et pour tout n de IN , $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout n de IN , $u_n > \alpha$.

b) Montrer que la suite u est strictement croissante .

c) Montrer que , pour tout n de IN , $u_{n+1} > \dfrac{1}{2} + u_n$.

d) Déduire que pour tout n de IN , $u_n > \dfrac{n}{2} + 2$ .Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Bon courage

Prof : Dhahbi . A	Devoir de synthèse n° 1	Section : 4^{eme} Economie et Gestion
L . S . A	Mathématique	Durée : 3h ; Date : 09 / 12/ 2002

EXERCICE N° 1 : (6 points)

1°/ a) Vérifier que : $(\sqrt{3} - 3i)^2 = -6 - 6\sqrt{3}\,i$.

b) Résoudre dans C , l'équation (E) : $z^2 - (\sqrt{3} + i)z + 2 + 2\sqrt{3}i = 0$.

2°/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $2i$ et $\sqrt{3} - i$.

a) Ecrire sous forme trigonométrique les nombre complexes $2i$ et $\sqrt{3} - i$.

b) Placer dans le plan P , les points A et B .

c) Soit C le point du plan tel que : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$. Déterminer l'affixe du point C .

d) Montrer que le point C appartient au cercle de centre O et passant par A .

e) Montrer que le quadrilatère OABC est un losange .

EXERCICE N°2 : (6 points)

1°/ a) Vérifier que : $(1 - 2i)^2 = -3 - 4i$.

b) Résoudre dans C , l'équation (E) : $z^2 - (3 + 4i)z + 7i - 1 = 0$.

2°/ On considère , dans C l'ensemble des nombres complexes , l'équation :

$(E) : z^3 - (3 + 5i)z^2 + (10i - 5)z + 7 + i = 0$

a) Vérifier que $z_0 = i$ est une solution de l'équation (E) .

b) Déterminer les nombres complexes a , b , c tels que , pour tout nombre complexe z :

$$z^3 - (3 + 5i)z^2 + (10i - 5)z + 7 + i = (z - i)(az^2 + bz + c) = 0 .$$

c) Résoudre dans C , l'équation (E) .

3°/ Dans le plan complexe P , rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $1 + 3i$; i et $2 + i$.

a) Placer sur une figure les points A , B et C .

b) Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle .

PROBLEME : (8 points)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$.

1°/ Montrer que la fonction f est définie sur $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

2°/ Etudier la continuité de f sur $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

3°/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 2 et la dérivabilité de f à gauche en -2 .
Interpréter géométriquement les résultats obtenues .

4°/ Etudier la dérivabilité de f en tout point de $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

5°/ a) Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) En déduire que la courbe représentative (C) de la fonction f admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ que l'on précisera .

6°/ a) Montrer que $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ .En déduire le tableau de variation de f .

b) Montrer que la droite d'équation y = 2x est une asymptote oblique à la courbe (C) .

c) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

7°/ a) Montrer que f réalise une bijection de $[2, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera .

b) Montrer que $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 + 4}{2x}$ pour $x \in J$.

c) Tracer la courbe représentative (C') de f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Bon courage

Prof : Dhahbi . A	Devoir de synthèse n°2	Section : 4^{eme} Economie et Gestion
L . S . A	Mathématique	Durée : 3h ; Date : 06 / 03/ 2004

EXERCICE N° 1 : (6 points)

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{9}{6-U_n} \end{cases} \text{. et pour tout } n \geq 0 \text{ ,}$$

1°/ a) Démonter , par récurrence , que pour tout $n \in IN$, $U_n \leq 3$.

b) Démontrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante .

2°/ En déduire que la suite (U_n) est convergente vers un réel l que l'on précisera .

3°/ On pose $V_n = \dfrac{1}{U_n-3}$ pour tout $n \geq 0$.

a) Montrer que V_n est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison .

b) Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n .

c) Retrouver alors la limite de (U_n) quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE N° 2 (6 points) :

A / x y et z étant trois réels , résoudre le système suivant :

$$S : \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 4x + 2y + z = 0 \\ 8x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

B / Soient a , b et c des réels et f la fonction définie sur $]0+\infty[$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c\sqrt{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ Quelle relation doivent vérifier les réels a , b et c pour que (C) passe par le point A (1 , - 2) .

2°/ Soit le point B (4 , 8) .

Montrer que la courbe (C) passe par le point B si et seulement si $8a + 2b + c = 4$

3°/ Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $]0+\infty[$ .En déduire que $f(1) = 2a + b + \dfrac{1}{2}c$.

4°/ On suppose que la courbe (C) passe par les points A , B et admet une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$

Montrer que $f(x) = x^2 - x - 2\sqrt{x}$

PROBLEME (8 points)

Partie A :

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 1 + (1-x)e^{-x}$.

1°/ a) Montrer que $g'(x) = (x-2)\mathbf{e^{-x}}$.

b) Etudier le sens de variation de g .

c) Calculer g (2) . En déduire que pour tout réel x , on a $g(x) > 0$.

Partie B :

On considère la fonction f définie par : $1 + x + xe^{-x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ a) Vérifier que pour tout réel x , on a : $f'(x) = g(x)$.

En déduire le tableau de variation de la fonction f .

b) Soit I le point de la courbe (C) d'abscisse 2 .

Montrer que I est un point d'inflexion pour la courbe (C) .

2°/ a) Montrer que la droite D d'équation : $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C) lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite D .

3°/ a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera .

b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f . Déterminer le domaine de continuité et de dérivabilité de f^{-1} .

4°/ Tracer la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère

Bon courage

Prof : Dhahbi . A	Devoir de synthèse n°3	Section : 4^{eme} Economie et Gestion
L . S . A	Mathématique	Durée : 3h ; Date : 10 / 05/ 2004

EXERCICE N°1 : (6points)

Une urne contient : cinq boules rouges numérotés : -1 , -1 , 1, 1 , 0 .
et quatre boules blanches numérotés : -1 , 1 , 1 , 1 .

Les boules sont indiscernables au toucher .

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne .

1°/ Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « obtenir trois boules de même couleurs »

B : « obtenir une seule boule portant le nombre -1 »

2°/ Soit l'événement C : « obtenir un produit des nombres marqués , égal à 0 »

Montrer que $p(C) = \frac{1}{3}$

3°/ Soit X l'aléa numérique qui associe , à chaque tirage de trois boules de l'urne la somme des nombres marqués sur les trois boules .

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer son espérance mathématique E(X) , sa variance et son écart - type .

3°/ On répète ce tirage 4 fois de suite en remettant à chaque fois les trois boules tirées dans l'urne .
Soit Y l'aléa numérique qui associe le nombre de réalisations de l'événement C au cours de ce quatre épreuves .

a) Déterminer la loi de probabilité de Y .

b) Calculer son espérance mathématique E(Y) , sa variance et son écart – type .

EXERCICE N ° 2 : (6 points)

1/ Résoudre dans IR^3 , le système : (S) $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x - y + z = -5 \\ 4x + 2y + z = 4 \end{cases}$

2/ soit a , b et c des réels et f l'application de C qans C définie par : $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$

a) Déterminer les réels a , b et c pour que l'on ait : $f(1) = 0$
$f(-1) = -6$
$f(2) = 12$

b) Vérifier que l'on a alors : $f(z) = (z-1)(z^2 + 2z + 4)$

3/ Résoudre, dans C, l'équation : $(z-1)(z^2 + 2z + 4) = 0$

4°/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A ,B et C d'affixes respectives $z_A = 1$; $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$.

a) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes z_B et z_C .

b) Placer , dans le plan P , les points A , B et C .

c) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme .

***PROBLEME* : (8 points)**

A – Soit la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x(1 - \text{Log}(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 .

2°/ Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation .

3°/ a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point d' abscisse e .

a) Montrer que la droite D : y = - x – 1 est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Pour $x \in]-\infty, 0]$, étudier la position de D et (C) .

c) Construire la courbe de (C) de f et D dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4°/ Soit h la restriction de f à $[1, +\infty[$.

b) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser .

b) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(h^{-1})'(0)$.

c) Construire la courbe de (C') de h^{-1} dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5°/ a) Calculer en intégrant par parties : $I_\alpha = \int_\alpha^e x\text{Log}x \, dx$ où $\alpha \in IR^*_+$.

b) Calculer : $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} I_\alpha$.

c) En déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C) et l'axe des abscisses .

Bon courage

Prof : Dhahbi . A	Devoir de contrôle n° 2	Section : 4^{eme} Economie et gestion
L . P . A	Mathématique	Durée : 2h ; Date : 07 / 02/ 2004

EXERCICE :(8 points)

Soit la suite définie sur IN par : $U_0 = 2$

$$U_{n+1} = \frac{5U_n - 3}{U_n + 1}$$

1/ Calculer U_1 et U_2 .

2/ a)Vérifier que : $U_{n+1} = 5 - \frac{8}{U_n + 1}$

b) Montrer, par récurrence , pour tout entier naturel n on a : $0 \prec U_n \prec 3$

c) Montrer que la suite U_n est strictement croissante .

d) Montrer que la suite U_n est convergente , en déduire sa limite .

3/ On définit la suite V_n sur IN par : $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n - 1}$.

a) Montrer que la suite V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme .

b) Calculer en fonction de n .

c) Montrer que pour tout $n \in$ IN , $U_n = \frac{V_n - 3}{V_n - 1}$.

Déduire alors U_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Problème (12 points)

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $I =]\,0\,, +\infty\,[$, par : $g(x) = -x^2 + 1 - \text{Log}(x)$.

1°/ Etudier les variations de la fonction g

2°/ Calculer g (1) .

3°/ En déduire que :

Si $x \succ 1$ alors $g(x) \prec 0$

Si $0 \prec x \prec 1$ alors $g(x) \succ 0$

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]\,0\,, +\infty\,[$, par : $f(x) = 3 - x + \frac{Logx}{x}$.

et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2cm)

1°/ a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

b) Interpréter ce résultat géométriquement .

2°/ a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]\,0\,, +\infty\,[$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

3°/ a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 3 - x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

c) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à (D) .

4°/ Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse e .

5°/ Tracer la courbe représentative (C) de f , (T) et (D) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6°/ Déterminer une primitive F de f sur $]\,0\,, +\infty\,[$ qui s'annule en 1 .

Bon courage

Prof : Dhahbi . A	Devoir de contrôle n° 3	Section : 4^{eme} Economie et gestion
L . P . A	Mathématique	Durée : 2h ; Date : 29 / 04/ 2004

EXERCICE N°1 :

Une urne contient cinq boules rouges , une boule noire et trois boules blanches .Les boules sont indiscernables au toucher .

On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne .

1°) Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « n'obtenir aucune boule rouge »

B : « obtenir une boule de chaque couleur »

C : « obtenir au moins une boule rouge »

2°/ Soit X l'aléa numérique qui associe , à chaque tirage de trois boule de l'urne le nombre de boule rouges obtenues .

a) Déterminer la loi de probabilité de X .
b) Calculer son espérance mathématique E(X) , sa variance et son écart - type .
c) Déterminer et représenter sa fonction de répartition F .

EXERCICE N° 2 :

1°/ Calculer à l'aide d'une intégration par partie les intégrales suivants .

$$A = \int_1^e Logx dx \qquad B = \int_0^1 xe^{-x} dx \qquad C = \int_1^e xLogx dx$$

2°/ Calculer $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \qquad J = \int_e^{e^2} \frac{Logx}{x} dx$

EXERCICE N° 3 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (2 - x)e^x$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.(unité :2cm)

1°/ a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu

b) Montrer que , pour tout réel x , $f'(x) = (1 - x)e^x$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

2°/ a) Déterminer l'intersection de (C) avec les axes de repère .

b) Montrer que (C) est un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées .

c) Déterminer une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 .

d) Tracer la courbe représentative (C) de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3°/ Calculer l'aire de la partie du plan limité par (C) , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées .

4°/ Soit $A(\lambda) = \int_\lambda^2 f(x)dx$ ou λ est un réel négatif.

a) Calculer $A(\lambda)$.
b) Calculer la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers $-\infty$

Bon courage

Prof : Dhahbi . A	**Devoir de contrôle n° 1**	**Section : 4eme MATHS 2**
L . P . A	**Mathématique**	**Durée : 2h ; Date : 12 / 11/ 2004**

EXERCICE N°1 :

Soit la famille d'équations (E_θ) : $z^2 - (1 + i\sin 2\theta)z + \frac{i}{2}\sin 2\theta = 0$

dans la quelle θ désigne un réel appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

A tout nombre complexe $z = x + iy$, on associe le point M de coordonnées (x , y) dans le plan

1°/ a) Résoudre l'équation (E_θ) dans l'ensemble des nombres complexes C .

b) Ecrire les solutions de (E_θ) sous forme exponentielle .

c) Préciser les cas de racines doubles

2°/ Soient M'(θ) et M''(θ) les points du plan associés aux solutions z'(θ) et z''(θ) de l 'équation (E_θ) et soit I(θ) le milieu du segment [M'(θ) , M''(θ)]

a) Déterminer l'ensemble des points I(θ) quand θ décrit l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

b) Montrer que l'ensemble des points M'(θ) et M''(θ) est un cercle (C) que l'on précisera

c) Démontrer lorsque I(θ) sont distincts, que la droite contenant ces deux points a une direction indépendante de θ

d) θ étant donné (on fera la figure avec $\theta = \frac{\pi}{6}$) , déduire de ce qui précède une construction simple de points I(θ) et des points M'(θ) et M''(θ) , une figure soignée comportera tous les éléments intéressants de l'exercice

EXERCICE N°3 :

On considère la suite (U_n) définie sur IN par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in IN$: $U_{n+1} = \frac{\sqrt{1+U_n^2}-1}{U_n}$.

1°/ Calculer U_1 et U_2 .

2°/ a) Montrer que $\forall n \in IN$, $U_n \in]0, 1]$

b) Montrer que la suite U_n est décroissante et qu'elle est convergente ,déterminer sa limite .

3°/ a) Montrer que $\forall n \in IN$, $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$.

b) En déduire que $\forall n \in IN$, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2^n}$.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite .

4°/ a) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{\sqrt{1+tg^2x}-1}{tgx} = tg\left(\frac{x}{2}\right)$.

b) Montrer , par récurrence , que pour tout $n \in IN$; il existe un réel $V_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $U_n = tg(V_n)$

c) En déduire que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d) En déduire que $\forall n \in IN$, $U_n = tg\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$.

e) En déduire la limite de la suite (U_n) et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^n U_n$.

f) En déduire la valeur de tg $\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$.

5°/ Pour tout $n \in$ IN , on pose $V_n = \dfrac{2^{n+3}U_{n+1}}{1+(U_{n+1})^2}$ et $W_n = 2^{n+1} U_n$.

a) Montrer que pour tout $n \in$ IN , $U_n = \dfrac{2U_{n+1}}{1-(U_{n+1})^2}$.

b) Montrer que pour tout $n \in$ IN , on a : $W_n - V_n = \dfrac{2^{n+4}.(U_{n+1})^3}{1-(U_{n+1})^4}$.

c) En déduire que : $0 \leq W_n - V_n \leq \dfrac{1}{2^{2n-2}}$, pour tout $n \in$ IN* , puis que la suite $t_n = W_n - V_n$ est convergente et trouver sa limite .

6°/ Montrer que W_n est décroissante .

7°/ Montrer que V_n et W_n sont convergentes et que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

8°/ On pose $L = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n$. Montrer que $L = \pi$

Bon courage

Prof : Dhahbi . A	Devoir de Synthèse n° 2	Section : 4^{eme} MATHS 2
L . P . A	Mathématique	Durée : 3h ; Date : 12 / 3/ 2005

EXERCICE N°1 :

Dans le plan complexe P , on considère un triangle ABC rectangle et isocèle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .On pose D = S_A (C) ; E = S_B(D) et H le projeté orthogonal de A sur (BC)

1°/ Soit S la similitude directe définie par : S (A) = B et S (B) = C .

a) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S .

b) Montrer que S (C) = D .

2°/ Soit Ω le centre de S .

a) Montrer que Ω est le point définie par : $\frac{\Omega C}{\Omega A} = 2$ et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

b) Construire alors le point Ω .

3°/ Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

a) Déterminer l'application complexe associé à la similitude S .

b) Déterminer alors l'affixe z_0 de Ω .

4°/ Soit σ la similitude indirecte définie par : σ (A) = B et σ (B) = C .

a) Déterminer le centre ϖ de σ et vérifier que ϖ = D .

b) On pose $\varphi = \sigma \circ S^{-1}$.

- Montrer que φ st une symétrie orthogonale que l'on précisera.
- Déterminer alors σ (C) .

5°/ Soit l'application f : P $\rightarrow$ P , M (z) $\rightarrow$ M' (z') / $z' = (-1 + i)\,\bar{z} + 1$.

a) Montrer que f est une similitude indirecte .

b) Montrer que f = σ .

EXERCICE N°2 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{Logx}{x^2}$.

1°/ a) Etudier les variations de f sur $[2, +\infty[$.

b) Montrer que , pour tout entier naturel k , k $\geq$ 2 : $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$.

(Ind : on peut utiliser le sens de variation de f)

2°/ On considère la suite S définie par son terme général : $S_p = \frac{Log2}{2^2} + \frac{Log3}{3^2} + \ldots\ldots + \frac{Logp}{p^2}$; p $\geq$ 2 .

a) Montrer que la suite S est croissante .

b) En utilisant (1) , montrer que : $S_p - \frac{Log2}{2^2} \leq \int_2^p f(t)dt \leq S_p - \frac{Logp}{p^2}$

et en déduire un encadrement de S_p .

c) En utilisant la valeur de $\int_2^p f(t)dt$, démontrer que la suite S est majorée .

d) On admettra que la suite S est convergente , montrer que sa limite L vérifie :

$$\frac{1}{2} + \frac{Log2}{2} \leq L \leq \frac{1}{2} + 3\frac{Log2}{2^2} .$$

PROBLEME :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f_n la fonction définie sur IR par : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$

$f_n(0) = 0$

(C_n) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A :

1°/ Montrer que f_n est continue sur IR .

2°/ Etudier la dérivabilité de f_n en 0 (on distinguera 2cas n = 2 et n > 2)

On considère la fonction φ_n définie sur par $\varphi_n(x)\,(n - x)\,e^x - n$.

a) Dresser le tableau de variation de φ_n .

b) Vérifier que pour tout $n \geq 2$, $e^{n-1} - n > 0$. En déduire que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet dans IR deux solutions 0 et α_n tel que $n - 1 < \alpha_n < n$.

c) Dresser alors suivant la parité de n le tableau de variation de f_n .

3°/ a) Montrer que f_n admet un extremum en α_n et que $f_n(\alpha_n) = \alpha_n^{n-1}(n - \alpha_n)$.

b) Tracer la courbe (C_2) de f_2 .(on prend $\alpha_2 \cong 1{,}6$) .

Partie B :

Pour tout $n \geq 2$, on pose $I_n = \int_{Log2}^{1} f_n(x)dx$ avec f_n la fonction définie dans la partie A .

1°/ Montrer que I_n est décroissante .

2°/ Prouver que I_n est minorée , en déduire qu'elle est convergente .

3°/ a) Montrer que pour tout $n \geq 2$: $\dfrac{1}{e-1}\left[\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{(Log2)^{n+1}}{n+1}\right] \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{(Log2)^{n+1}}{n+1}$.

b) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

Partie C :

Soit F la fonction définie $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_{Logx}^{2Logx} f_2(t)dt$.

1°/ a) Justifier l'éxistance de F (x) pour tout $x \in [1, +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \in]1, \sqrt{e}[$ il existe $c \in [Logx, 2Logx]$ tel que ; $F(x) = \dfrac{c^2}{e^c - 1} Logx$

et que : $\dfrac{(Logx)^3}{(x+1)(x-1)^2} \leq \dfrac{F(x)}{x-1} \leq \dfrac{4(Logx)^3}{(x-1)^2}$.

c) En déduire que F est dérivable à droite en 1 et calculer $F'_d(1)$.

2°/ a) Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $F'(x) = \dfrac{(Logx)^2}{x(x^2-1)}[7 - x]$.

b) Prouver que pour tout $x \in [e^2, +\infty[$ on a : $\dfrac{4(Logx)^3}{x^2 - 1} \leq F(x) \leq \dfrac{(Logx)^3}{x-1}$.

c) Dresser le tableau de variation de F .(on ne cherchera pas à calculer F (7)) .

Bon courage

Prof : Dhahbi . A	Devoir de controle n° 3	Section : 4^{eme} MATHS 2
L . P . A	Mathématique	Durée : 2h ; Date : 23 / 4/ 2005

EXERCICE N° 1 :

On dispose de deux urnes : U_1 , U_2 .
Dans l'urne U_1 , il y a trois boules rouges et deux boules blanche .
L'urne U_2 contient deux boule rouge et deux boules blanches .
Toutes les boules sont indiscernables au toucher .

I - Une opération consiste à tirer une boules de U_1 et une boule de U_2

1°/a) Calculer la probabilité de l' évènement suivant :
A : « Obtenir deux boules de même couleur »
b) Sachant qu'on a obtenu deux boules de couleurs différents , quelle est la probabilité pour que la boule rouge soit tirée de U_1 .

2°/ Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de boule blanches tirées .
a) Déterminer la loi de probabilité de X .
b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

3°/ On répète l'opération précédente quatre fois de suite , en remettant à chaque fois la boule dans l'urnes ou elle tirée .
Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants .
B : Obtenir au plus une fois deux boules de méme couleur .
C : « Obtenir deux boules de méme couleur pour la première fois à la troisième épreuve .

II – On considère l'épreuve suivante : on tire une boule de U_1 , si elle est blanche on la garde et on tire une autre boule de U_1 , si elle est rouge on la met dans U_2 et on tire successivement sans remise deux boules de U_2 .
Soit Y la variable aléatoire qui indique le nombre de boule blanches obtenues au cours de cette épreuve .
Déterminer la loi de probabilité de Y .

EXERCICE N°2 :

L'unité de longueur étant le centimètre .
Soit ABF un triangle équilatéral tel que AB = 4 . On note Δ la médiatrice de [AB] et soit I = A * B .
Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABF et d la tangente à (C) en A .

1°/ Soit E l'ellipse de foyer F et I et de grand axe 6 .
a) Vérifier que A et B appartiennent à E .
b) Montrer que d est la tangente à E en A .
c) Construire les sommets de E .

2°/ Soit G un point du plan tel que le triangle IFG soit isocèle et rectangle en F et E' l'ellipse de foyers F et G et de grand axe 6 .
a) Montrer que si M est un point commun à E et E' alors M appartient à la médiatrice Δ' de [IG]
b) Construire les points communs à E et E' .
c) Montrer que E et E' possèdent deux tangentes communes .

3°/ Soit Γ une ellipse variable dont l'un des foyers F et passant par A et B .
a) Montrer que le second foyer F' de Γ décrit la droite Δ privée de F .
b) On note 2a le grand axe de Γ . Montrer que $2a \geq 6$.

EXERCICE N°3 :

Pour tout n $\in$ IN* , on pose $I_n = \int_0^n (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}dx$.

1°/ A l'aide d'une intégration par parties , calculer I_1 .

2°/ a) Montrer que , pour tout t $\in$ IR+ , on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq \text{Log}(1+t) \leq t$.

b) En déduire que pour tout x $\in$ [0 , n] ., on a : $x - \frac{x^2}{2n} \leq n\,\text{Log}(1+\frac{x}{n}) \leq x$.

c) Montrer alors que pour tout x $\in$ [0 , n] , on a : $e^{-x}e^{-\frac{x^2}{2n}} \leq (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x} \leq e^{-x}$.

3°/ Calculer $\int_0^n e^{-x}dx$ et montrer que $I_n \leq 1 - e^{-n}$.

4°/ a) Montrer que , pour tout t $\in$ IR+ , on a : $e^{-t} \geq 1 - t$.

En déduire que , pour tout x $\in$ [0 , n] , on a : $e^{-x}e^{-\frac{x^2}{2n}} \geq e^{-x} - \frac{x^2}{2n}e^{-x}$.

b) Calculer $\int_0^n x^2e^{-x}dx$, en déduire que $I_n \geq 1 - \frac{1}{n} + e^{-n}(\frac{1}{n}+\frac{n}{2})$.

c) Montrer que (I_n) est convergente et calculer sa limite .

Bon courage

Prof : Dhahbi . A	Devoir de synthèse n° 3	Section : 4eme Economie et gestion
L . S . A	Mathématique	Durée : 3h ; Date : 13 / 05/ 2003

EXERCICE N° 1 : (6 points)

1°/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (0 , $\vec{u}$, $\vec{v}$) , on considère les points A , B , C et I d'affixes respectives : $z_A = -2i$; $z_B = 1+i$; $z_C = 4+2i$ et $z_I = 2$.

a) Placer sur une figure les points A , B , C et I .

b) Vérifier que I est le milieu du segment [AC] .

2°/ a) Calculer les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle de sommet principal B .

3°/ Soit D le symétrique de B par rapport au point I .

a) Déterminer l'affixe z_D de point D

b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un losange .

EXERCICE N°2 :

Soit $z = -1 - i$; $z' = -1 + i\sqrt{3}$; $Z = \frac{z}{z'}$.

1°/ Ecrire chacun des nombres complexes z , z' et Z sous forme trigonométrique .

2°/ En déduire $\cos\frac{7\pi}{12}$, $\sin\frac{7\pi}{12}$.

EXERCICE N°3 :

A / Calculer les limites suivants

B / Soit la fonction $f : IR \to IR$

$$x \to \begin{cases} f(x) = \sqrt{4-x^2} & \text{si } x \in [-2, 2] \\ f(x) = \dfrac{2x^2+8x+8}{x^2-4} & \text{si } x < -2 \\ f(x) = x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur son domaine de définition .

Prof : Dhahbi . A	Devoir de synthèse n° 1	Section : 4^{eme} Economie et Gestion
L . P . Elkhawarismi	Mathématique	Durée : 3h ; Date : 10 / 12/ 2002

EXERCICE N° 1 : (6 points)

1°/ a) Vérifier que : $(9 + 2i)^2 = 77 + 36i$.

b) Résoudre dans C , l'équation (E) : $z^2 - (9 - 2i)z - 18i = 0$.

2 °/ a) Résoudre dans C , l'équation (E') : $Z^4 - (9 - 2i)Z^2 - 18i = 0$.

b) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions de (E').

3°/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $1 + i$; $3i$ et $1 + 3i$.

a) Placer dans le plan P , les points A ; B et C.

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C .

EXERCICE N°2 : (6 points)

1°/ a) Vérifier que : $(1 - 2i)^2 = -3 - 4i$.

b) Résoudre dans C , l'équation (E) : $z^2 - (3 + 4i)z + 7i - 1 = 0$.

2°/ On considère, dans C l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

$$(E) : z^3 - (3 + 5i)z^2 + (10i - 5)z + 7 + i = 0$$

a) Vérifier que $z_0 = i$ est une solution de l'équation (E) .

b) Déterminer les nombres complexes a , b , c tels que , pour tout nombre complexe z :

$$z^3 - (3 + 5i)z^2 + (10i - 5)z + 7 + i = (z - i)(az^2 + bz + c) = 0 .$$

c) Résoudre dans C , l'équation (E) .

3°/ Dans le plan complexe P, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + 3i$; i et $2 + i$.

a) Placer sur une figure les points A, B et C.

b) Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle.

PROBLEME : (8 points)

A / Soit g la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = 2 + \sqrt{x+1}$.

1° / Montrer que g est continue sur $[0, +\infty[$.

2°/ a) Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $g'(x) \prec 0$, pour tout $x \in [0, +\infty[$

b) En déduire que $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0, +\infty[$

c) Vérifier que : $4 \prec \alpha \prec 5$

B / Soit f la fonction numérique définie sur $[-1, +\infty[$ par : $f(x) = 2 - x + \sqrt{x+1}$.

1°/ a) Etudier la dérivabilité de f à droite en - 1 .

b) Interpréter géométriquement le résultat obtenue .

2°/ Etudier la dérivabilité de f en tout point de $]-1, +\infty[$.

3 °/ Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat obtenue .

4°/ a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$. En déduire le tableau de variation de f .

b) Montrer que pour tout $x \in [-1, +\infty[$ $f(x) = x$ équivaut à $g(x) = 0$

c) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5°/ a) Montrer que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera .

b) Montrer que $f^{-1}(x) = (x - 1)^2 - 1$. pour $x \in J$.

c) Tracer la courbe représentative (C') de f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Bon courage

Problème (12 points)

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $I =]0, +\infty[$, par : $g(x) = -x^2 + 1 - \text{Log}(x)$.

1°/ Etudier les variations de la fonction g

2°/ Calculer $g(1)$.

3°/ En déduire que :

Si $x \succ 1$ alors $g(x) \prec 0$

Si $0 \prec x \prec 1$ alors $g(x) \succ 0$

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$, par : $f(x) = 3 - x + \dfrac{Logx}{x}$.

et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2cm)

1°/ a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

b) Interpréter ce résultat géométriquement .

2°/ a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

3°/ a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 3 - x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

d) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à (D) .

4°/ Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse e .

5°/ Tracer la courbe représentative (C) de f , (T) et (D) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6°/ Déterminer une primitive F de f sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 .

Bon courage

***PROBLEME* : (8 points)**

A – Soit la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x(1 - \text{Log}(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 .

2°/ Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation .

3°/ a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point d' abscisse e .

d) Montrer que la droite D : $y = -x - 1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

e) Pour $x \in]-\infty, 0]$, étudier la position de D et (C) .

f) Construire la courbe de (C) de f et D dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4°/ Soit h la restriction de f à $[1, +\infty[$.

e) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser .

b) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(h^{-1})'(0)$.

c) Construire la courbe de (C') de h^{-1} dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE N°4:

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives: $a = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $b = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.

1°/ a) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexe a et b.

b) Représenter les points A et B dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

2°/ On pose z = a + b et on désigne par M le point d'affixe z.

a) Montrer que OBMA est un carré.

b) Donner la forme trigonométrique de z.

c) Calculer alors $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

3°/ Soient A et B les points d'affixes respectives 3 et 4i, et (C) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3| = |z-4i|$

- ☐ (C) est la médiatrice du segment [AB].
- ☐ (C) est le cercle de centre Ω d'affixe 3 – 4i et de rayon 3.
- ☐ (C) est le cercle de centre A et de rayon 3.

4°/ Le plan complexe, muni d'un un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A et B d'affixes respectives 2 et 3i. L'affixe du point C tel que OACB soit un paralellogramme est :

- ☐ $z_C = 2 - 3i$
- ☐ $z_C = 3 - 2i$
- ☐ $z_C = 2 + 3i$

EXERCICE N° 4 :

I - Soit g la fonction définie sur $I =]0, +\infty[$, par : $g(x) = x + (x - 2)\ln(x)$.

1°/ a) Montrer que $g'(x) = 2\dfrac{x-1}{x} + \ln x$.

b) En déduire que : si x > 1 alors : $g'(x) > 0$

si x < 1 alors : $g'(x) < 0$

2°/ a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que : pour x > 0, g (x) > 1

II- Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$, par : $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln(x))^2$.

1°/ a) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b) Vérifier que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ et dresser le tableau de variation de f .

2°/ On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1

b) Donner le sens de variation de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x - 1 - \ln x$.

En déduire le signe de h (x) .

c) Montrer que $f(x) - x = (\ln(x) - 1)h(x)$.

En déduire la position de la courbe (C) par rapport à sa tangente (T) .

3°/ a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Conclure.

b) Tracer (T) et (C) .

4°/ a) Montrer que $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 - x(\ln(x))^2 + 2x \ln x - x$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$

b) En déduire l'aire A du domaine limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $x = 1$, $x = e$ et $y = 0$.