Lycées Tahar Sfar et Ibn Sina Mahdia	**Devoir de contrôle n° 2** *Mathématiques*	*Classe : 4 ème Sc exp*
Date : 05 /02 / 2010	*Profs : M me Turki et M rs Baccar, Hamza et Meddeb*	*Durée : 2 heures*

Exercice n°1 : (6 pts)

Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{1-x^2}}{x} & si\ x \in\ ]0\,,1[\\ \sqrt{x^2-1} & si\ x \in [1\,,+\infty[\end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

1) $a/$ Vérifier que f est continue en 1.
   $b/$ Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2) $a/$ Etudier les variations de f.
   $b/$ Montrer que la droite $D : y = x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$.
   $c/$ Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D sur $[1\,,+\infty[$.
   $d/$ Tracer D et $\mathscr{C}$.
3) $a/$ Montrer que f est une bijection de $]0\,,+\infty[$ sur IR.
   $b/$ On note f^{-1} la fonction réciproque de f.
   Montrer que f^{-1} est dérivable en 0.
   $c/$ On désigne par $\mathscr{C}\,'$ la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.
   Tracer $\mathscr{C}\,'$.
   $d/$ Montrer que, pour tout $x \in\ ]-\infty\,,0]$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice n°2 : (4 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0\,,1]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x$.

1) Dresser le tableau de variations de f.
2) $a/$ Montrer que f est une bijection de $[0\,,1]$ sur $\left[0\,,\ \frac{1}{2}\right]$.
   $b/$ On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f.
   Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\left[0\,,\ \frac{1}{2}\right[$.
   $c/$ Calculer $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ et $(f^{-1})'\left(\frac{1}{4}\right)$.

$d/$ Montrer que, pour tout $x \in \left[0\,,\,\frac{1}{2}\right[$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{-4}{\pi\sqrt{1-4x^2}}$.

Exercice n°3 : (4 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les points $A(3\,,0\,,0)$, $B(0\,,1\,,1)$, $C(-1\,,1\,,2)$ et $D(3\,,1\,,1)$.

1) $a/$ Calculer les composantes du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   $b/$ Déduire l'aire du triangle ABC.
   $c/$ Montrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires.
2) $a/$ On note V le volume du tétraèdre $ABCD$. Montrer que : $V = \frac{1}{2}$.
   $b/$ Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). Calculer DH.
3) $a/$ Calculer la distance du point D à la droite (AC).
   $b/$ On note H' le projeté orthogonal de D sur la droite (AC), montrer que le triangle DHH' est rectangle et en déduire HH'.

Exercice n°4 : (6 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les points $A(-3\,,0\,,0)$, $B(0\,,3\,,0)$ et $C(-3\,,3\,,-3)$.

1) $a/$ Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P.
   $b/$ Montrer qu'une équation cartésienne de P est : $x - y - z + 3 = 0$.
   $c/$ Soit le point $H(-2\,,2\,,-1)$, montrer que H est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.
2) Soit l'ensemble S d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 8z - 15 = 0$.
   $a/$ Montrer que S est une sphère dont-on précisera le centre I er la rayon R.
   $b/$ Vérifier que A, B et C appartiennent à S.
   $c/$ Vérifier que (IH) est l'axe de $\mathscr{C}$.
   $d/$ Déterminer l'intersection de S et P.
3) Soit le point $D(1\,,0\,,0)$.
   $a/$ Vérifier que D est à l'intérieur de S, et que les points A, B, C et D sont non coplanaires.
   $b/$ Soit Q le plan d'équation : $x + 1 = 0$.
   Montrer que Q est le plan médiateur du segment $[AD]$.
   $c/$ Déterminer le centre Ω et le rayon R' de la sphère S' circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

Bonne chance