

Exercice n° 1: (7 points)

Soit u et v deux suites définies sur \mathbb{N} par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_n = \frac{7}{u_n}$.

1/ Calculer v_0, u_1, v_1, u_2 et v_2 . Comparer les valeurs approchées de u_2 et v_2 .

2/ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

3/ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n - v_n \geq 0$.

4/ Etudier la monotonie de chacune des deux suites u et v .

5/ a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq \frac{7}{3}$.

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{3}{28}(u_n - v_n)^2$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n - v_n \leq \left(\frac{3}{28}\right)^{2^n - 1}$.

6/ Montrer que u et v sont adjacentes. Résoudre dans $]0, +\infty[$: $x = \frac{7}{x}$ et déduire la limite de u et v .

Exercice n° 2: (7 points)

I) Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer :

a) $\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2} dt$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(t) \cos^3(t) dt$

c) $\int_1^2 \frac{2}{(3t-1)^2} dt$

II) Soit f la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par : $f(x) = \cotan^2(x)$.

1/ a) Etudier les variations de f .

b) Montrer que f réalise une bijection de $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J qu'on précisera.

c) Tracer la courbe () de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

2/ Soit $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$. Calculer puis interpréter graphiquement I . Déduire la valeur de $J = \int_0^1 f^{-1}(t) dt$

3/ Montrer que $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(t) dt = \frac{1}{3}$. Calculer le volume engendré par la rotation autour

(O, \vec{i}) de la partie de () limitée par les droites $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice n° 3: (6 points)

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On désigne par I le milieu de la face ABFE et J le milieu de $[DC]$.

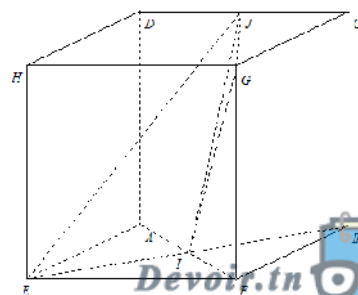
1/ a) Calculer $\overrightarrow{EI} \wedge \overrightarrow{EJ}$. Déduire l'aire du triangle EIJ .

b) Calculer le volume du tétraèdre EIJ . Déduire la distance du point G au plan (EIJ) .

2/ a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan $P=(EIJ)$ est : $2x + y + 2z - 2 = 0$.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par G est perpendiculaire à P .

c) Déduire que le projeté orthogonal K du point G sur P a pour coordonnées $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.



Bon travail

