Lycées Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 2** Mathématiques	*Niveau* : 4 ème Sc exp
Date : 12 / 02 / 2011	*Profs* : M me Turki et M rs Hamza et Meddeb	*Durée* : 2 heures

Exercice n°1 : (7 pts)

I. Soit φ la fonction définie sur IR par : $\varphi(x) = x^3 + 3x + 4$.

1) Etudier le sens de variation de φ.
2) Calculer $\varphi(-1)$, en déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $\varphi(x)$.

II. On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x^2+1}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Montrer que, pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{x.\varphi(x)}{(x^2+1)^2}$.
2) Etablir le tableau de variations de f.
3) $a/$ Montrer que la droite $\Delta: y = x$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.

   $b/$ Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
4) Tracer $\mathscr{C}$ et Δ. (on précisera l'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses).
5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0\,,+\infty[$.

   $a/$ Montrer que g est une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera.

   $b/$ On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g.

   Tracer $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $(O,\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice n°2 : (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = tan^2(x)$.

1) $a/$ Montrer que f réalise une bijection de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $]0,+\infty[$.

   $b/$ On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f.

   Calculer : $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$.
2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$.
3) On pose, pour $x \in\ ]0,+\infty[$, $g(x) = f^{-1}(x^2) + f^{-1}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

   $a/$ Calculer $g(1)$.

   $b/$ Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $g'(x) = 0$.

   $c/$ En déduire que, pour tout $x \in\ ]0\,,+\infty[$, $g(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice n°3 : (8 pts)

Soit le cube $OABCDEFG$ représenté par la figure ci-dessous.

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\,,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$.

Soit α un réel supérieur ou égal à 1.

L, M et K sont les points définis par :

$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OL} = \alpha\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{BK} = \alpha\overrightarrow{BF}$.

1) $a/$ Déterminer les composantes du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$.

   $b/$ En déduire, en fonction de α, l'aire du triangle DML

   $c/$ Calculer, en fonction de α, le volume du tétraèdre $DMLK$.

   $d/$ Calculer le volume du tétraèdre $ACDF$.

2) $a/$ Démontrer que la droite (OK) est perpendiculaire au plan (DML).

   $b/$ La droite (OK) coupe le plan (DML) en H.

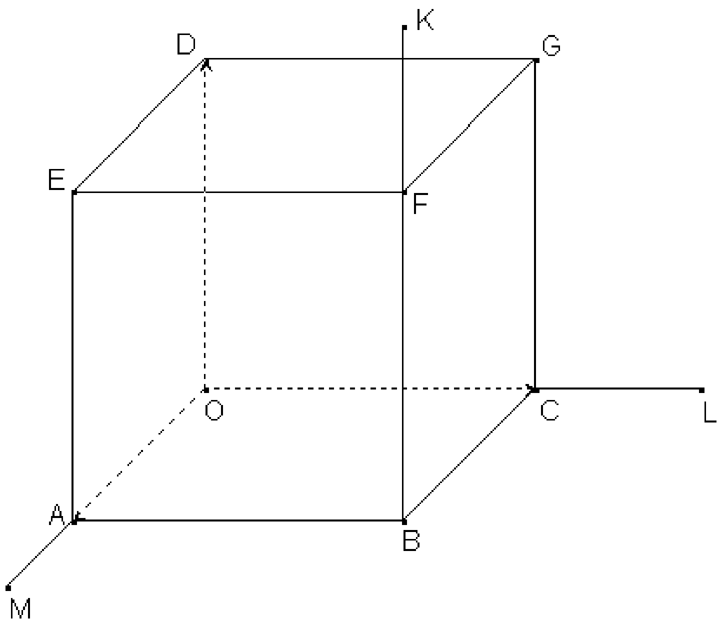
   Démontrer que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}$.

   $c/$ Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda\overrightarrow{OK}$.

   Montrer que $\lambda = \dfrac{\alpha}{\alpha^2+2}$.

   $d/$ Démontrer que $\overrightarrow{HK} = (1-\lambda)\overrightarrow{OK}$, en déduire que $HK = \dfrac{\alpha^2-\alpha+2}{\sqrt{\alpha^2+2}}$.

   $e/$ Retrouver alors le volume du tétraèdre $DMLK$.



Bonne chance