| | | | |
|---|---|---|---|
| *Site web :* http://www.matheleve.net<br>*Email1 :contact@matheleve.net*<br>*Email2 :matheleve@gmail.com* | ***Devoir de contrôle n°02*** | | |
| Lycée Ali Bourguiba Bembla | *4 ème sc1* | *Samedi 18-02-2012* | *Chortani Atef* |



**Exercice1 (4 points)**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on donne le plan P : x + y + z + 1 = 0 et les points A(0,−1,−3) et H(1,0,−2).

1) Montrer que H est le projeté orthogonal de A sur le plan P.

2) Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) tels que $x^2 + y^2 + z^2 + 2y + 6z + 7 = 0$.

a) Montrer que S est une sphère dont on donnera le rayon et le centre.

b) Calculer AH.

c) En déduire S∩ P.

3) Soit le point B (1, 1,1).

a) Vérifier que A, B et H ne sont pas alignés.

b) Calculer la distance du point A à la droite (BH).

c) En déduire la nature de S∩ (BH).

**Exercice 2(4 points)**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ On donne les points

A (1,− 2,− 1), B (1,3,1) et C (5,6,5)

1)a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés puis calculer l'aire du triangle ABC

2a) Calculer le volume du tétraèdre OABC

b) En déduire la distance du point O au plan (ABC)

3) Calculer le volume du parallélépipède ayant pour arêtes [OA] , [OB] et [OC]

**Exercice 3 (6 points)**

1) Soit $g$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = -1 + x + 2\ln x$

a ) Etudier le sens de variation de $g$

b) Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de sur $]0;+\infty[$

c ) En déduire que : si $0 < x < 1$ *alors* , $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ *et si* $x > 1$ *alors* $g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$.

2) On considère la fonction $f$ définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2\ln x \quad \text{si} \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et on désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ [unité graphique : 2 cm].

a) Montrer que $f$ est dérivable à droite en zéro.

b) Calculer $f'(x)$et vérifier que pour tout $x$ strictement positif on a: $f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$

c) Dresser le tableau de variation de $f$ .

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans ] 0,+ ∞ [ exactement une solution

α telle que $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$

3)a) Vérifier que la tangente Δ à la courbe C au point O a pour équation $y = x$. .

b) Etudier la position de C par rapport à Δ.

c) Tracer Δ et C dans le repère

**Exercice 4 (6 points)**

I) On appelle $f$ et $g$ les deux fonctions définies sur l'intervalle [0 ; +∞[ par :

$$f(x) = \ln(x+1) - x \text{ et } g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

1) Étudier les variations de $f$ et de $g$ sur [0 ; +∞ [.

2) En déduire que pour tout $x \geq 0$ , $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$

II) On se propose d'étudier la suite $(u_n)$ de nombres réels définie sur $\mathbb{N}^*$par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)u_n \text{ , } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$ :

$$\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

3) On pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + .. + \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + .. + \frac{1}{4^n}$

à l'aide de la première partie, montrer que : $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln(u_n) \leq S_n$

4) Calculer $S_n$ et $T_n$ en fonction de $n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

5) a) Montrer que la suite $(u_n)$ est strictement croissante.

b) En déduire que $(u_n)$ est convergent. Soit $\ell$ sa limite.

Montrer que $\frac{5}{6} \leq \ln(\ell) \leq 1$ et en déduire un encadrement de $\ell$.