Site web : http://www.matheleve.net
Email1 : contact@matheleve.net
Email2 : matheleve@gmail.com

Devoir de contrôle n°02

Lycée Ali Bourguiba Bembla	4 ème sc1	Lundi 18-02-2013	Chortani Atef

Exercice 1(6points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k})$

On donne les points A (1,0,0) ; B(0, 2, 0) et C (0, 0, 3).

1)a)Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire qu'une équation du plan (ABC) est $6x + 3y + 2z - 6 = 0$

2) Soit I et J les milieux respectifs des segments [AB] et[AC]

On désigne par Δ la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{k}$ et par Δ'

La droite passant par J et de vecteur directeur $\vec{j}$

a)Donner une représentation paramétriques de chacune des droites Δ et Δ'

b)En déduire que Δ et Δ' sont sécantes au point $\Omega\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)$

c)Calculer la distance de Ω au plan (ABC)

Exercice 2(6points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{4+\cos x}$

1) Montrer que f admet dans IR une seule primitive F vérifiant $F(0) = 0$.

2) a) Montrer que la fonction définie sur IR par : $g(x) = F(x) - F(-x)$ est constante.

b) Etudier alors la parité de F .

3) a) Montrer que : pour tout $t \in [0;+\infty[$ on a : $\frac{1}{6}t \le f(t) \le t$

b) Déduire que pour tout $x \in [0;+\infty[$ on a : $\frac{1}{12}x^2 \le F(x) \le \frac{1}{2}x^2$

4) Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

5) a) Etudier le comportement de la courbe (C) de F au voisinage de $+\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de F.

Exercice 3(8points)

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \, ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) \quad si \; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que f est une fonction paire.

b)Monter que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

2)a) Montrer que f est dérivable en 0.

b) Montrer que f est dérivable sur IR*et que pour tout x $\in$ IR* on a :

$$f'(x) = \frac{2}{x}\left[f(x) - \frac{x^2}{1 + x^2}\right]$$

3) a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction : t $\rightarrow$ln t,

Montrer que pour tout x $\in$ IR*, il existe un réel c$\in$] x^2, 1 + x^2 [tel que ln (1 + $\frac{1}{x^2}$) = $\frac{1}{c}$.

b) Déduire que pour tout x $\in IR_+^*$, on a : $\frac{x^2}{1+x^2} <$ f (x) $<$ 1 .

c) Déterminer alors le signe de f '(x) dans IR_+^* et dresser le tableau de variation de f .

4)Tracer la courbe représentative (C) de f relativement à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

5) Pour tout n $\in$ IN* , U_n = $(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$.

a) Exprimer U_n en fonction de f (n) .Déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty}$ U_n = e.

c) Montrer que la suite U_n est croissante.