L.A.B.BEMBLA | Mr : Mbarki JAMEL

Devoir de contrôle N°2

A.S :2012 -2013 | Durée :2h | Classe :4SC$_2$

Exercice 1 : (3 pts)

Chaque question comporte trois affirmations, une seule des trois est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier l'affirmation exacte sans justifier votre choix.

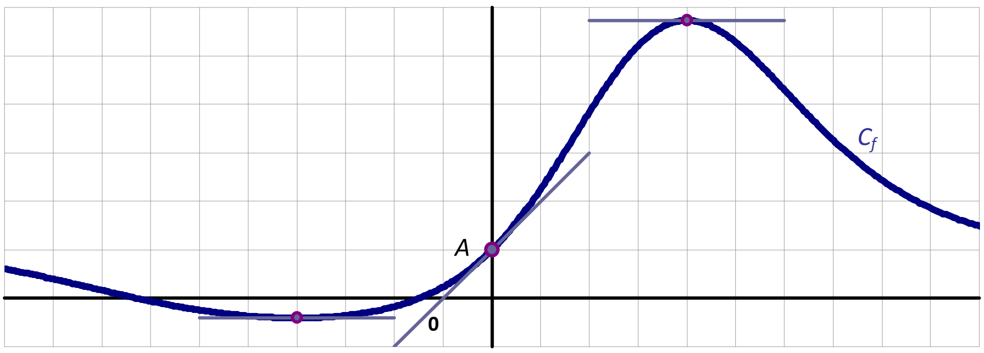
Une bonne réponse rapporte 0,5 point; une mauvaise réponse ou l'absence de réponse donne 0 point.

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La figure ci-dessous montre une partie de sa courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé.

On dispose des renseignements suivants sur la fonction f et la courbe (C_f) :

- la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [−2 ; 2], elle est strictement décroissante sur l'intervalle]−∞; −2] et sur l'intervalle [2 ; +∞[;
- la droite d'équation $y = 0,5$ est asymptote à la courbe (C_f) en − ∞ et en + ∞ ;
- la tangente en $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ à la courbe (C_f) passe par le point de coordonnées $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.



1) Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0,49$ admet :
   - une solution
   - deux solutions
   - trois solutions

2) On note f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. La fonction f' est :
   - croissante sur [0 ; 2]
   - positive sur [−2 ; 2]
   - positive sur [0 ; + ∞[

3) La tangente en A à la courbe (C_f) a pour équation :
   - $y = 0,5x + 1$
   - $y = x + 0,5$
   - $y = 1,5x + 0,5$

4) Si F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ alors :
   - $F'(0) = 0,5$
   - F est croissante sur $]-2;0]$
   - $F'(2) = 0$

5) On note g la fonction définie sur [0 ; + ∞[par $g(x) = \ln(f(x))$:
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\ln 2$

6) On note g' la dérivée de la fonction g sur [0 ; + ∞[:
   - $g'(0) = 0$
   - $g'(0) = 2$
   - $g'(0) = \ln 0,5$

Exercice 2 : (6 ,5 pts)

I- Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1+x+\ln x$

1) Dresser le tableau de variation de g

2) a) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α sur $]0,+\infty[$ et que $0.27<\alpha<0.28$

b) En déduire le signe de g(x).

II- On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln(x)}{x+1} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat

2) a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, on a : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$. Interpréter graphiquement le résultat

b) Vérifier que $f(\alpha)=-\alpha$

c) Tracer (ζ_f)

Exercice 3 : (6 ;5 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{-3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$, $B(1,0,1)$, $C(0,0,2)$ et $D(-1,-2,2)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}$.

b) Montrer que les points B , C et D définissent un plan qu'on désignera par P et montrer que $2x-y+2z-4=0$ est une équation cartésienne de ce plan.

2) a) Calculer le produit scalaire $\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right)\cdot\overrightarrow{BA}$.

b) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

c) Donner le volume du tétraèdre ABCD.

3) a) Montrer que le point $H\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{-4}{3},\dfrac{7}{6}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan P.

b) Montrer que, dans le plan P, H est le centre du cercle (ζ) circonscrit au triangle BCD .

4) Déterminer une équation de la sphère de centre A et coupée par le plan P suivant le cercle (ζ).

Exercice 4 : (4 pts)

Soit la fonction f définie sur $]0,\dfrac{\pi}{2}]$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$

1) Etudier les variations de f .

2) a) Montrer que f est une bijection de $]0,\dfrac{\pi}{2}]$ sur $[1,+\infty[$.

b) On désigne par g la fonction réciproque de f , calculer g (1) , g ($\sqrt{2}$) et g(2) .

c) Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que : $g'(x)=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$