

Exercice 1:

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points $A(3, 2, 4)$, $B(0, 3, 5)$ et $C(3, 1, 0)$

1./ Montrer que ABC est un triangle et calculer son aire.

2./ Soit le point $E(1, a+2, -1)$ où a est un réel.

a. Calculer en fonction de a , $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AE}$

b. En déduire la valeur de a pour que E soit un point du plan (ABC)

3./ Dans la suite on prend $\underline{a = 2}$

Soit H le projeté orthogonal du point E sur le plan (ABC) .

a. Calculer le volume du tétraèdre $EABC$

b. En déduire EH

4./a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EH)

c. Déterminer les coordonnées du point H

5./ Soit S la sphère dont une équation cartésienne est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 10z + 15 = 0$$

a. Déterminer les coordonnées du centre I et le rayon R de S .

b. Vérifier que la droite (AI) est perpendiculaire au plan (ABC)

c. Déterminer la position relative du plan (ABC) et la sphère S

Exercice 2:

Soit la suite définie sur \mathbb{N}^* par : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x^2 + 1} dx$

1./ Calculer I_1 .

2./ Etudier la monotonie de la suite (I_n)

3./ a. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq x^n \sqrt{x^2 + 1} \leq \sqrt{2} x^n$

b. Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

c. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.



Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1./a. Vérifier que $f'(x) = \frac{2x-x^3}{(\sqrt{1-x^2})^3}$. En déduire que f réalise une bijection de $[0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$

2./Soit $F(x) = \int_0^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2}dt$; $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

a. Montrer que F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et calculer $F'(x)$

b. En déduire que $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

c. Calculer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$

d. En déduire que $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx = \frac{\pi-2}{8}$

3./ on donne ci-dessous les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , $(C_{f^{-1}})$ et les droites d'équations :

$x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (la partie hachurée)

