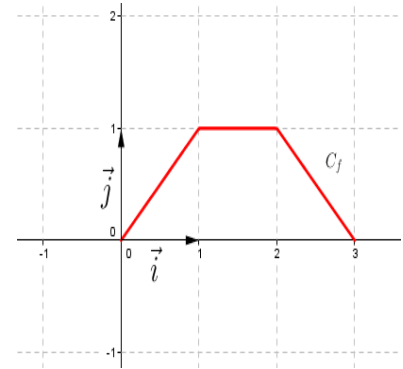


EXERCICE 1 (3pts)

Soit la fonction f dont la représentation graphique est C_f donné ci-dessous et F la primitive de f sur $[0, 3]$ qui s'annule en 0.

Répondre par vrai ou faux



- 1) F n'est pas dérivable en 1 et 2.
- 2) F est décroissante sur $[0, 3]$
- 3) Si $x \in [0, 1]$ alors $F(x) = \frac{1}{2}x^2$
- 4) Si $x \in [1, 2]$ alors $F(x) = x - \frac{1}{2}$

EXERCICE 2 (6pts)

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
(b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résultat obtenu.
 - (a) Montrer que f dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
 - (b) Dresser le tableau de variation de f .
 - (a) Montrer que la droite $D : y = 2x$ est une asymptote oblique à C_f .
 - (b) Tracer C_f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - (a) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - (b) Montrer que $\forall x \in J$ on a : $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$
 - (c) Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère.
2. Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$
 - (a) Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[: g(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$
 - (b) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
 - (c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et $\forall x \in K : (g^{-1})'(x) = \frac{2}{1 + x^2}$

EXERCICE 3 (6pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1. (a) Justifier que f admet des primitives sur \mathbb{R} .

Soit F la primitive de f sur \mathbb{R} qui s'annule en 0. On pose $G(x) = F(x) + F(-x)$

- (b) Montrer que $G(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 (c) En déduire la parité de F .

2. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = F\left(-\frac{1}{x}\right)$

- (a) Démontrer que g est une primitive de f sur \mathbb{R} .
 (b) En déduire que $F(x) = 2F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in]0, +\infty[$
 (c) Calculer alors $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

3. Soit h la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x) = F(\tan x)$.

- (a) Calculer $h'(x)$.
 (b) En déduire que $h(x) = x, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
 (c) Calculer $F(1)$
 (d) En déduire la valeur l .

EXERCICE 4 (5pts)

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
 $B(1, 0, 1); C(0, 0, 2)$ et $D(-1, -2, 2)$.

1. (a) Calculer $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$

- (b) Montrer que les points B, C et D définissent un plan $P : 2x - y + 2z - 4 = 0$.
 (c) Calculer l'aire du triangle BCD .

- (a) Calculer $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA}$.

- (b) En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
 (c) Calculer alors le volume ν du tétraèdre $ABCD$.

- (a) Montrer que le point $H\left(\frac{1}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{7}{6}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan P .

- (b) Montrer que, dans le plan P , H est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD .

BON TRAVAIL

