Afli Ahmed	Devoir de Contrôle n°2	Lycée I.K. Jammel
$4Sc.exp_1$		07/12/2016

Exercice 1 :

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.) Soit α un reel et on designe par (E) l'équation : $z^2-(1+2\cos\alpha)z+1+\cos\alpha-i\sin\alpha=0$

a. Vérifier que : $4\cos^2\alpha+4i\sin\alpha-3=(1+2i\sin\alpha)^2$

b. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

2.) Soient A et B deux points d'affixes respectives : $z_A=e^{-i\alpha}$ et $z_B=1+e^{i\alpha}$, avec $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

a. Montrer que $z_B=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$ puis déduire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme exponentielle.

b. Déterminer alors α pour que le triangle OAB soit rectangle en O.

3.) Soit C le symétrique du point A par rapport à l'axe des abscisses.

a. Vérifier $\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}=-2i\sin(\alpha)$.

b. Déduire l'affixe du point D pour que le quadrilatère ACBD soit un rectangle.

c. Déterminer α pour que ACBD soit un carré.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1.) Dresser le tableau de variations de f.

2.) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $\alpha\in\left]\frac{2}{3};1\right[$

3.) Soit (U_n) la suite réelle définie sur IN par $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n); n\in IN \end{cases}$

a. Montrer que pour tout n $\in\mathbb{N}$, $\frac{2}{3}\leq U_n\leq 1$

b. Montrer que pour tout x $\in\left[\frac{2}{3};1\right]$, $|f'(x)|\leq\frac{5}{9}$

c. En déduire que $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{5}{9}|U_n-\alpha|$

d. Montrer alors que $|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{5}{9}\right)^n|1-\alpha|$

e. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,\frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \sqrt{\tan x}$

1.) a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

b. Interpréter graphiquement le résultat.

2.) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,;\,\frac{\pi}{2}[$ sur $[0\,;+\infty[$.

3.) a. Expliquer pourquoi f^{-1} est dérivable à droite en 0 et donner $(f^{-1})'(0)$.

b. Calculer $f^{-1}(\sqrt[4]{3})$ et $\lim\limits_{x\to\sqrt[4]{3}} \dfrac{f^{-1}(x) - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt[4]{3}}$

4.) a. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

b. Montrer que pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $\tan\left(f^{-1}(x)\right) = x^2$.

c. Déterminer alors l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$.