2016/2017

DEVOIR DE CONTRÔLE # 2

LYCÉE CHEBBI

MATHÉMATIQUES

PR : SOLTANI MOHSEN

Le sujet comporte 2 *pages numérotés de* 1 *à* 2
Une copie non soignée sera sanctionnée.

Exercice 1 **(6 points)**

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)\Big) - \ln(n)$.

1. Démontrer que $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n})$.
2. (a) Démontrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ on a :
$$\frac{1}{n}\ln(1+\frac{k}{n}) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln(1+\frac{k+1}{n})$$
.
   (b) En déduire que :
$$u_n - \frac{1}{n}\ln(2) \leq \int_1^2 \ln(x)dx \leq u_n$$
3. Déduire de ce qui précède un encadrement de (u_n) .
4. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 2 **(8 points)**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (1 - \ln(x))^2$.

1. Étudier les variations de f.
2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[e, +\infty[$
   (a) Montrer que g réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
   (b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la courbe $(\mathscr{C}')$ de g^{-1} dans un même repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_n = \int_1^e (1 - \ln(t))^n dt$.
   (a) Calculer t_1 .
   (b) En intégrant par parties , montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $t_{n+1} = -1 + (n+1)t_n$.
   (c) On désigne par M et N les points de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisses respectives 1 et e .
   Soit $\mathscr{V}$ le volume de solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\widehat{MN}$ de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ autour de l'axe $(O, \vec{i})$. Calculer $\mathscr{V}$.

Exercice 3

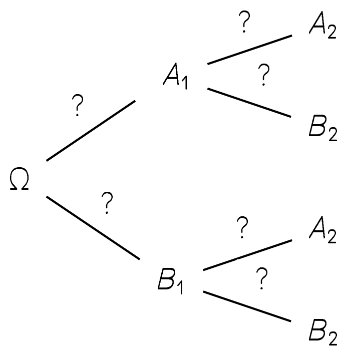
.(**6 points**)

Un groupe de 22 personnes décide d'aller au cinéma deux samedi de suite pour voir deux films A et B.
Le premier samedi , 8 personnes vont voir le film A et les autres vont voir le film B.
Le deuxième samedi,4 personnes décident de revoir le film A , 2 vont revoir le film B et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.
Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe .
On considère les évènements suivants :
A_1 : "la personne interrogée a vu le film A le premier samedi ".
A_2 : "la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi ".
B_1 : "la personne interrogée a vu le film B le premier samedi ".
B_2 : "la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ".

1. (a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant , en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante .

   (b) Calculer : $p(A_2)$

   (c) Une personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi , quelle est la probabilité qu'il l'ait vu aussi le premier samedi.



2. Le prix du billet pour le film A est de 30 dinars et de 20 dinars pour le film B.
   On appelle X la variable aléatoire égale au cout total , pour la personne interrogée , des deux séances de cinéma.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X .

   (b) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X