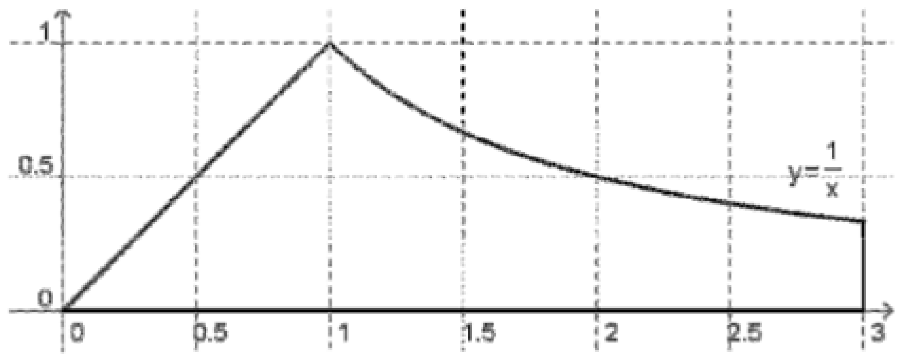
EXERCICE ❶ $(5pts)$

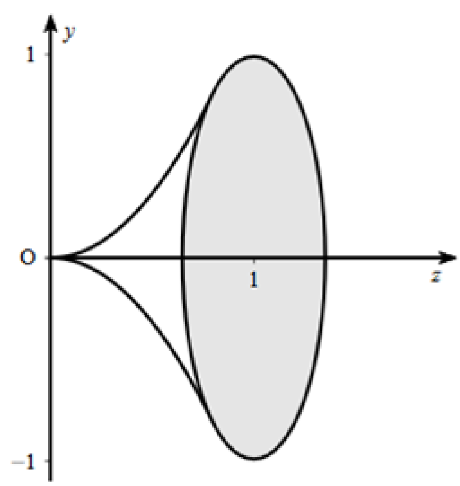
1. En utilisant une intégration par parties,calculer $I = \int_1^e x \ln x dx$ et $J = \int_1^e \ln^2(x) dx$

2. Déterminer $\lim_{x \to 0^+} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right)$

3. Déterminer l'aire du domaine (en unités d'aire) .



4. Déterminer le volume de la trompette obtenue par révolution autour de l'axe (Oz) du morçeau de parabole d'équation: $y = z^2$ avec $0 \leq z \leq 1$



5. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $1 - 0.8^n > 0.99$

EXERCICE ❷ $(7pts)$

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par: $f(x) = \ln x + 1 - \dfrac{1}{x}$

1. (a) Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

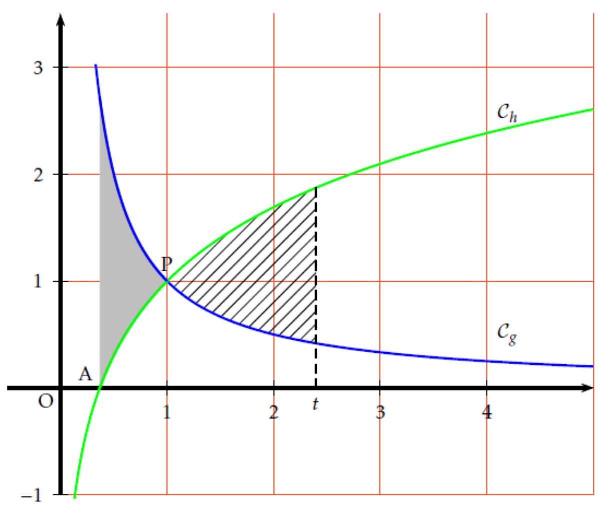
   (b) Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.

(c) En déduire le signe de $f(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$ (on pourra calculer $f(1)$).

2. (a) Montrer que F définie sur $]0,+\infty[$ par: $F(x) = x\ln x - \ln x$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que F est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

3. (a) Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \dfrac{1}{e}$ admet une unique solution $\alpha \in]1,+\infty[$
   (b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

4. Soient g et h les fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par: $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h(x) = \ln x + 1$.Sur le graphique ci-dessous, on a représenté C_g et C_h dans un repère orthonormée $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



   (a) Déterminer les coordonnées du point A.
   (b) Justifier que les coordonnées du point P sont $(1,1)$.

5. On note λ l'aire du domaine délimitée par C_g, C_h et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = 1$ et $\lambda_t\,(t > 1)$ l'aire du domaine délimitée par C_g, C_h ets le droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = t$
   (a) Montrer que $\lambda = 1 - e^{-1}$
   (b) Montrer que $\lambda_t = t\ln t - \ln t$
   (c) Déterminer une valeur de t telle que $\lambda = \lambda_t$

EXERCICE ❸ $(5pts)$

Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé direct et les points $A(5,-5,2)$; $B(-1,1,0)$; $C(0,1,2)$ et $D(6,6,-1)$

1. (a) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
   (b) Déterminer la nature du triangle BCD.
   (c) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$

2. (a) Montrer que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

(b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

3. (a) Déterminer une représentation paramétrique de $\triangle$ orthogonale au plan (BCD) passant par A

   (b) Déterminer les coordonnées du point M, intersection de $\triangle$ et du plan (BCD).

4. Soit $H(x_0, y_0, z_0)$ le projeté orthogonale de A sur le plan (BCD).

   (a) Justifier l'existance d'un réel β tel que $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} -2\beta \\ 3\beta \\ \beta \end{pmatrix}$

   (b) Déterminer les coordonnées de H.

EXERCICE ❹ $(3pts)$

L'espace est muni d'un repére orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
Soit la sphére $S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z = 3$

1. (a) Préciser le rayon r et les coordonnées du centre I de la sphére S.

   (b) Vérifier que $A(-3, 1, 1) \in S$

2. Soit P le plan d'équation $P : 2x + y - 2z - 6.5 = 0$.

   Montrer que l'intersection du P et S est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.