Classe : Bac –Sc
Durée : 2h
Date : 2017/2018
Prof :H-Jamel

Devoir de contrôle2
Mathématiques

EXERCICE N°1

1) a/ Résoudre dans C : $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$
(on donnera les solutions sus forme exponentielles)
b) Déduire les solutions de l équation : $z^4 - 2\sqrt{3}\,z^2 + 4 = 0$

2) Soit dans C l equation (E) : $z^3 - 2(\sqrt{3} + i)\,z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})\,z - 8i = 0$
a) Vérifier que (2i)est une solution de (E) .
b) Résoudre alors dans C l équation (E) .
3) Soit $\theta \in IR$; on pose l equation :
(E_θ) : : $z^3 - 2e^{i\theta}(\sqrt{3} + i)\,z^2 + 4\,e^{2i\theta}(1 + i\sqrt{3})\,z - 8\,i\,e^{3i\theta} = 0$
a) Montrer que zest une solution de (E_θ) si et seulement $ze^{-i\theta}$ solution de (E)
b) Déduire alors les solutions de l équation (E_π)

EXERCICE N°2

Soit g une fonction dérivable sur IR Vérifiant : $\begin{cases} g'(x) = \dfrac{2x}{(x^2-1)^2+1} \\ g(1) = 0 \text{ et } g(\sqrt{2}) = \dfrac{\pi}{4} \\ \lim_{+\infty} g(x) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

1) On pose h la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x)= \begin{cases} \frac{1}{2} g\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \text{ si } x > 0 \\ \frac{\pi}{4} \text{ si } x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que h est continue a droite en 0
b) Montrer que h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que $h'(x) = \frac{-1}{2(x^2+1)}$
c) Soit $x > 0$. En utilisant T.A.F montrer qu' il existe un réel c de intervalle $]0, x[$ telle que $\frac{h(x)-\frac{\pi}{4}}{x} = \frac{-1}{2(c^2+1)}$
d) Déduire que h est dérivable a droite de 0
2) a)Dresser le tableau de variation de h

b) Montrer que h(x) = x admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$
c) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $|\,h'(x)\,| \leq \frac{1}{2}$

3) On considère la suite (V_n) définie sur IN par $\begin{cases} v_0 \in [0,+\infty[/\{\alpha\} \\ v_{n+1} = h(v_n) \end{cases}$

a)Montrer que pour tout entier n de IN on : $v_n > 0$

b) Montrer que pour tout entier n on : $|v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|v_n - \alpha|$

c) Déduire alors que pour tout entier n de IN on : $|v_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n \, |v_0 - \alpha|$

d) déterminer alors limite de la suite (V_n)

EXERCICE N°3

Soit f la fonction définie sur [-1 ;1[par : $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f a droite en (-1) .interpréter résultat

b) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que f réalise une bijection de [-1,1[sur un J que l on précisera.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x de l intervalle J.

3) On pose g(x) = f (sinx) pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

a)Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $g'(x) = \frac{1}{1-\sin x}$

b) Montrer que g admet une fonction réciproque notée g^{-1}

4) On pose $u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{k=2n} g^{-1}(k)$ pour tout entier $n \in IN^*$

a) Montrer que : $g^{-1}(n) \leq u_n \leq g^{-1}(2n)$

b) Déduire que la suite (U_n) convergente et donner sa limite

BON COURAGE