Lycée Houmet Souk Prof : Loukil Mohamed	Devoir de Contrôle N : 2 Durée : 2 Heures	4 Sc 3 & 4 Tec 3 13 - 12 - 2017

EXERCICE N : 1 (3 points)

A) Pour chacune des questions suivantes , indiquer la seule proposition correcte **en justifiant la réponse** .

1) Les racines cinquièmes de (32 i) sont :

a) $\begin{cases} Z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)} \\ k \in \{-2,-1,0,1\} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} Z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)} \\ k \in \{-2,-1,0,1,2\} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} Z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)} \\ k \in \{-2,-1,0,1,2\} \end{cases}$

2) Z_1 et Z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^2 + (1-3i)Z + 2i - 2 = 0$ alors :

a) $\arg(Z_1) + \arg(Z_2) \equiv \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$ **b)** $|Z_1 Z_2| = \sqrt{2}$ **c)** $\arg(Z_1 Z_2) \equiv -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

3) f est une fonction dérivable sur $[-1, 2]$ telle que : $3 \le f'(x) \le 5$ pour tout $x \in [-1, 2]$ alors :

a) $3 \le f(2) - f(-1) \le 5$ **b)** $3 \le f(2) - f(-1) \le 15$ **c)** $9 \le f(2) - f(-1) \le 10$

EXERCICE N : 2 (7 points)

A) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par : $f(Z) = Z^3 + aZ^2 + bZ + c$ où a, b et c sont **des réels** .

1) Montrer que si : $f(2) = 0$ et $f(1-i) = 0$ alors on a : $\begin{cases} 4a + 2b + c = -8 \\ b + c = 2 \\ 2a + b = -2 \end{cases}$

2) Déterminer alors les valeurs de a , b et c .

B) Dans la suite on prend : $f(Z) = Z^3 - 4Z^2 + 6Z - 4$.

1) Vérifier que pour tout nombre complexe Z , on a : $f(Z) = (Z-2)(Z^2 - 2Z + 2)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(Z) = 0$.

3) Résoudre dans **IR** l'équation : **(E)** $Z^9 - 4Z^6 + 6Z^3 -$

C) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\ }, \vec{\ })$.
On considère les point A et B d'affixes respectives : $Z_A = 2$ et $Z_B = 1 - i$.

1) Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle .

2) Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses .

a) Déterminer alors Z_C l'affixe du point C .

b) Montrer que OBAC est un carré .

EXERCICE N : 3 (10 points)

A) Soit la fonction f définie sur $]1,2]$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - x^2}}{x-1}$.

On désigne par **(C f)** la courbe représentative de f dans le repère orthonormé **R** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche de 2 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

b) Montrer que f est dérivable sur $]1,2[$ et prouver que pour tout $x \in]1,2[$; $f'(x) < 0$.

2) a) Dresser le tableau de variations de f .

b) Montrer que f réalise une bijection de $]1,2]$ sur un intervalle J que l'on précisera .

c) Montrer que pour tout $x \in J$; $f^{-1}(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

3) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet dans $]1,2]$ une unique solution α .

4) Tracer dans l'annexe ci-jointe **(Cf^{-1})** .(Préciser la demi-tangente au point d'abscisse 0) .

B) Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$ pour tout $n \in IN$.

1) a) Représenter sur l'axe $(O, \vec{i})$ les termes U_0, U_1 et U_2 .

b) Quel conjecture , sur la monotonie et la convergence de (U_n) , peut-on faire ?

2) Montrer que pour tout $n \in IN$; $1 \leq U_n \leq 2$.

3) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$; $|(f^{-1})'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4) a) Montrer que pour tout $n \in IN$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} |U_n - \alpha|$.

b) Déduire que pour tout $n \in IN$; $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |1 - \alpha|$.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite .

Bonne chance

Nom et Prénom :

Annexe à rendre avec la copie