

Exercice n°1: (7 points)

1) soit l'équation (E): $z^2 - \sqrt{2}z + 1 - i\sqrt{2} = 0$.

- a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
b) Déduire la deuxième solution de (E).

2) Le plan est munie d'un repère orthonormé directe $((O, \vec{u}, \vec{v}))$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs $Z_A = -i$, $Z_B = \sqrt{2} + i$, $Z_C = 1 + i\sqrt{2}$ et $Z_D = Z_B + Z_C$.

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$ construit dans l'annexe ci joint.

- a) Vérifier que les points B et C appartient au cercle (C).
b) Construire les points B et C.
c) Montrer que OBDC est un losange puis construire le point D.
d) Montrer que $Z_D = (1 + \sqrt{2})(1 + i) = (2 + \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) Soit (C') le cercle de centre O et de rayon $(2 + \sqrt{2})$ et soit H le point de (C') et tel que ODH est un triangle équilatéral direct.

- a) Construire le cercle (C') et le point H.
b) Montre que $Z_H = (2 + \sqrt{2})e^{i\frac{7\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{3}}Z_D$
c) Déduire $\cos \frac{7\pi}{12}$.

Exercice n°2: (7 points)

Soit la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

1) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2 + 1}}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Donner une équation de la tangente T à la courbe de f au point A d'abscisse 1.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe de f et la tangente T,

2)a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α puis vérifier que $1 < \alpha < 2$.

b) Montrer que : $f'(\alpha) = \frac{-1}{\alpha^4}$

3) Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) Soit la suite définie sur \mathbb{N} par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : U_n \geq 1$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |U_n - \alpha|$



c) En déduire que : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

d) Déduire la limite de la suite U.

Exercice n°3: (6 points)

Soit la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$ on a $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit la fonction g définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

b) Montrer que g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que $g'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Vérifier que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ on a $g(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Bon travail