EXERCICE N°1

Le graphique de l'annexe représente une fonction f dérivable sur IR. Le point $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de C_f

T est la tangente au point A enfin C_f possède deux asymptotes horizontales.

1) Par lecture graphique répondre aux questions suivantes :

a) Préciser $f(0)$ et $f'(0)$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c) Prouver que pour tout réel x : $f(x) + f(-x) = 1$

d) Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

2) On suppose que $f(x)=\dfrac{ae^{2x}}{1+be^{2x}}$. En utilisant 1) montrer que $a = b = 1$

3) a) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in$J.

b) Soit Γ la courbe de f^{-1} dans le même repère, tracer sur l'annexe Γ et la tangente T' à Γ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α et que $0{,}8 < \alpha < 0{,}9$

b) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et Γ et les droites d'équations $x = 0$ et $y= 0$

Montrer que $\mathcal{A} = -[\alpha^2 + \ln(2-2\alpha)]$

EXERCICE N°2

Pour tout $n \in IN^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_1^e (1-\ln x)^n\,dx$

1) Montrer que $u_1 = e-2$

2) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n\in IN^*$, $u_{n+1} = -1 + (n+1)u_n$

b) En déduire les valeurs de u_2 et u_3

3) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et positive .En déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, on a : $u_n \leqslant \frac{1}{n}$.En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE N°3

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points $A\,(0,0,2\sqrt{2})$; $B\,(\sqrt{3},-1,0)$; $C\,(-\sqrt{3},-1,0)$ et $D\,(0,2,0)$.

1) Montrer que A, B et C déterminent un plan $\mathcal{P}$ dont une équation cartésienne est : $2\sqrt{2}\,y - z + 2\sqrt{2} = 0$

2) Soit M un point de $[OA]$ tel que : $\overrightarrow{OM} = \alpha\,\vec{k}$ où α un réel.

a) Déterminer en fonction de α les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}$.

b) Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ la somme des aires des triangles ABM et CDM, montrer que $\mathcal{A}(\alpha) = 2\sqrt{2}-\alpha+\sqrt{3\alpha^2+3}$

c) Déterminer la valeur de α pour laquelle $\mathcal{A}(\alpha)$ est minimale.

3) On considère l'ensemble S des points $M(x, y, z)$ de l'espace $\mathcal{E}$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{2}\,z - 4 = 0$

a) Montrer que l'ensemble S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon r.

b) Montrer $S\cap\mathcal{P}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC. Caractériser ce cercle.

ANNEXE (Feuille à compléter et à rendre)

Nom :............................... ***Prénom*** :...............................

EXERCICE N°4

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse proposée est correcte. Cocher la.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \ln x\right)$ est égale à

☐ 0 ☐ $-\infty$ ☐ $+\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ est égale à

☐ 2 ☐ 1 ☐ $\dfrac{1}{2}$

3) L'ensemble de définition de f définie par $f(x) = \ln\left[\ln\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right]$ est

☐ $]-1, 0[$ ☐ $]-\infty, 0[$ ☐ $]-\infty, 0[-\{-1\}$

4) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de la courbe (C) d'équation $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ constitué des points de (C) d'abscisses comprises entre 1 et e.

Le solide ainsi engendré a pour volume

☐ π ☐ $\dfrac{\pi e}{3}$ ☐ $\dfrac{\pi}{3}$

5) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3 .La suite (e^{u_n}) est une suite

☐ Arithmétique de raison e^3 ☐ géométrique de raison 3 ☐ géométrique de raison e^3

6) ABCD est un tétraèdre **régulier** d'arrête a. Le réel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ vaut

☐ a^2 ☐ $\dfrac{1}{2}a^2$ ☐ $-\dfrac{1}{2}a^2$