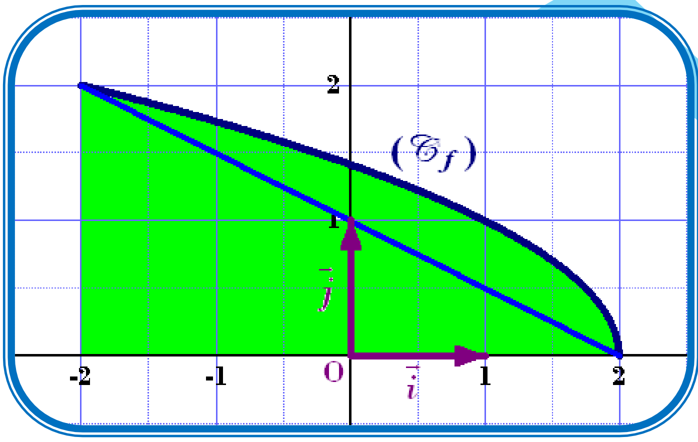
EXERCICE N° 01 (4 pts)

1-Cocher la réponse exacte :
D'après la représentation graphique ci-contre on a :

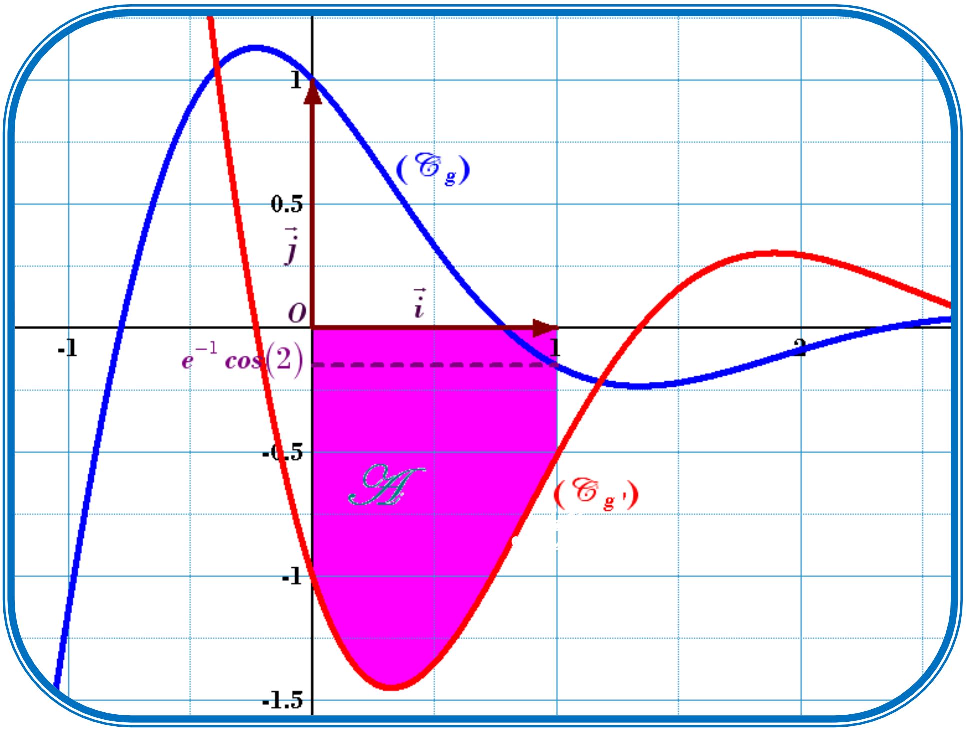


a) $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 4$ ☐

b) $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 8$ ☐

c) $\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{16}{3}$ ☐

2- Calculer la surface $\mathscr{A}$



3-Répondre par vrai ou faux :

a) Soit f une fonction continue , dérivable sur $[a,b]$,telle que f' soit continue sur $[a,b]$et g une fonction continue , dérivable sur $f([a,b])$, alors :

$$\int_a^b g\circ f(x)\times f'(x)\,dx=\int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,dt$$ ☐

b) Soit $a\in\mathbb{R}$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{a-\frac{\pi}{2}}^{a+\frac{\pi}{2}} \left|cos(nt)\right|dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|cos(nt)\right|dt$$ ☐

4- Où est l'erreur ?

Soit $h(x)=ln\left(x^x\right)\ ;\ x\in\mathbb{N}^*$

D'une part on a : $h(x)=x.ln(x)\ \Rightarrow\ h'(x)=1+ln(x)$ ❶

D'autre part , on a :

$$h(x)=ln\left(x^x\right)$$

$$=ln\left(\underbrace{x\times x\times x\times\cdots\times x}_{x\text{ fois (car }x\in\mathbb{N}^*\text{)}}\right)$$

$$=\underbrace{ln(x)+ln(x)+\cdots+ln(x)}_{x\text{ fois}}\Rightarrow h'(x)=\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x}}_{x\text{ fois}}=1$$ ❷

❶ et ❷ donnent : $ln(x)=0\ ,\forall n\in\mathbb{N}^*$ **!!!???**

EXERCICE N° 02 (5 pts)

Soit $f(x)=sin(\pi.x)\ ;\ x\in[0,1]$

1-a) Tracer ($\mathscr{C}_f$) dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

b) Calculer $I=\int_0^1 sin(\pi.x)\,dx$.

c) Interpréter graphiquement cette intégrale.

2- Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose :

$$S_n=\frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

a) Interpréter graphiquement S_n en introduisant les rectangles R_K de base $\left[\frac{k}{n},\frac{k}{n}\right]$ et de hauteur $f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $0\leq k\leq n-1$. Faire la figure pour $n=6$.

b) Montrer que $1+e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{2\pi}{n}}+\cdots+e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}=\dfrac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$

c) En déduire que $sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+sin\left[\frac{(n-1)\pi}{n}\right]=\frac{cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{2}{\pi}$

e) Comparer les résultats des questions 1- et 2-. Conclure.

EXERCICE N° 03 (6 pts)

Soit $f(x)=e^{3x}-e^{x}\quad ; \quad x\in\mathbb{R}$

1- Dresser le tableau de variation de f

2- a) Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution $\alpha\in[0,1]$

b) Prouver que $\ln\left(1+e^{-\alpha}\right)=2\alpha$

3- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-x}\right)$

a) Montrer que $g(x)\geq 0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}_+$

b) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, on a : $|g'(x)|\leq\frac{1}{4}$

4- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=g(u_n) \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE N° 04 (6 pts)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

-I-

Soient $A(3;2;4)$, $B(0;3;5)$, $C(0;2;1)$ et $D(3;1;0)$

1- a) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

b) Calculer $\mathscr{A}$ l'aire du parallélogramme $ABCD$.

2- Soit E le point définie par $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right)$.

Déterminer les coordonnées de E.

3- Calculer le volume $\mathscr{V}$ du prisme droit de base $ABCD$ et de hauteur $[AE]$.

-II-

Soit $S_m=\left\{M(x;y;z)/\,x^2+y^2+z^2-2mx-2y-2(m+1)z-m-2=0\,;\,m\in\mathbb{R}\right\}$

1- Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m.

2- Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.

3- Déterminer le plus petit rayon R_m des sphères S_m.

4- Montrer que toutes les sphères contiennent un cercle $(\mathscr{C})$ à préciser.