Lycées Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 3** *Mathématiques*	*Classe : 4 ème Sc exp1*
Date : 28 /04 / 2011	*Prof : Meddeb Tarak*	*Durée : 2 heures*

Exercice n°1 : (3 pts)

Pour chacune des propositions suivantes, répondre par **Vraie** ou **Faux** sans justification.

P1 : La fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$ est définie sur $]0,+\infty[$.

P2 : La fonction $x \mapsto x\ln\left(\frac{x}{e}\right)$ est une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln x$.

P3 : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}=\frac{3}{2}$.

P4 : La valeur moyenne sur $[-1,1]$ de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x\sqrt{1-x^2}}{e^{x^2}}$ est égale à 0.

Exercice n°2 : (7 pts)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les points $A(1\,,1\,,0)$ et $B(0\,,1\,,1)$.

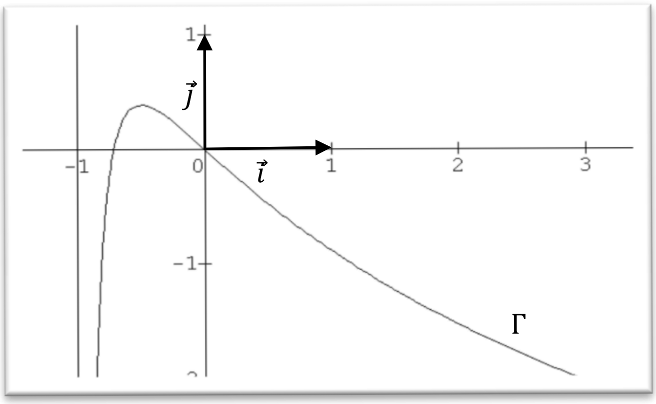
1) $a/$ Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$.
   $b/$ En déduire que les points O, A et B déterminent un plan P dont on donnera une équation cartésienne.
   $c/$ Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et passant par A. Montrer que B appartient à $\mathscr{C}$.
   $d/$ Soit G le point de coordonnées $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$. Montrer que G appartient à $\mathscr{C}$.
2) Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=\alpha \\ y=-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$, $\alpha\in IR$.
   Vérifier que Δ est l'axe de $\mathscr{C}$.
3) Pour tout réel m, on considère l'ensemble S_m des points $M(x,y\,z)$ tels que :
   $$x^2+y^2+z^2-2mx+2my-2mz-2=0\,.$$
   $a/$ Montrer que, pour tout $m\in IR$, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m .
   $b/$ Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m décrit IR.
   $c/$ Vérifier que, pour tout $m\in IR$, $A\in S_m$.
   $d/$ Déterminer l'intersection de S_m et le plan P.
4) Soit Q le plan dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-4\sqrt{3}=0$.
   $a/$ Vérifier que Q est perpendiculaire à P.
   $b/$ Montrer que $S_{\sqrt{2}}$ est tangente à Q.
   $c/$ On désigne par H le point de contact de $S_{\sqrt{2}}$ et Q. Calculer la distance OH.

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

Exercice n°3 : (10 pts)

A- Soit la fonction φ définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\varphi(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1).$$



La courbe Γ ci-contre est la représentation graphique de φ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etablir le tableau de variations de φ.

2) On désigne par α l'abscisse du point d'intersection de Γ avec l'axe $(O,\vec{i})$ autre que l'origine du repère.

Utiliser la courbe Γ pour déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

B- Soif f la fonction définie sur $D=]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1) $a/$ Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$.

$b/$ Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2) Montrer que : $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^3}$ pour tout $x\in D$.

3) On considère l'intégrale : $I=\int_\alpha^0\varphi(x)dx$.

$a/$ Donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

$b/$ En remarquant que : $\varphi(x)=x^3f'(x)$, montrer, en utilisant une intégration par parties

que : $I=\dfrac{-\alpha^2}{2(\alpha+1)}-3\int_\alpha^0\ln(x+1)dx$.

$c/$ Vérifier que la fonction : $x\mapsto(x+1)\ln(x+1)-x$ est une primitive de la fonction :

$x\mapsto\ln(x+1)$.

$d/$ Montrer alors que : $\int_\alpha^0\ln(x+1)dx=\dfrac{\alpha}{2}$, puis que : $I=\dfrac{-4\alpha^2-3\alpha}{2(\alpha+1)}$.

4) $a/$ Etablir le tableau de variations de f.

$b/$ Montrer que : $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. Puis donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ en

prenant $\alpha\simeq-0,7$.

$c/$ Tracer $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux