

SECTION :

SCIENCES EXPERIMENTALES

EPREUVE :

MATHEMATIQUES

DUREE : 2 h

COEFFICIENT : 3

Exercice 1 (6 points)

On a représenté ci-dessous dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (\mathcal{C}) d'une fonction f solution de l'équation différentielle (E): $y' + y = e^{-x}$ et sa tangente au point d'abscisse (-1)

- La courbe (\mathcal{C}) admet une branche parabolique de direction (O, \vec{j}) au voisinage de $-\infty$
- L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (\mathcal{C})

1) Par lecture graphique déterminer

a) $f(0)$ et $f'(-1)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

2) a) Montrer que $f'(0) = -1$

b) En déduire une équation de la tangente à (\mathcal{C}) point d'abscisse 0

3) a) Montrer que $f(-1) = e$

b) Calculer l'aire de la partie du plan

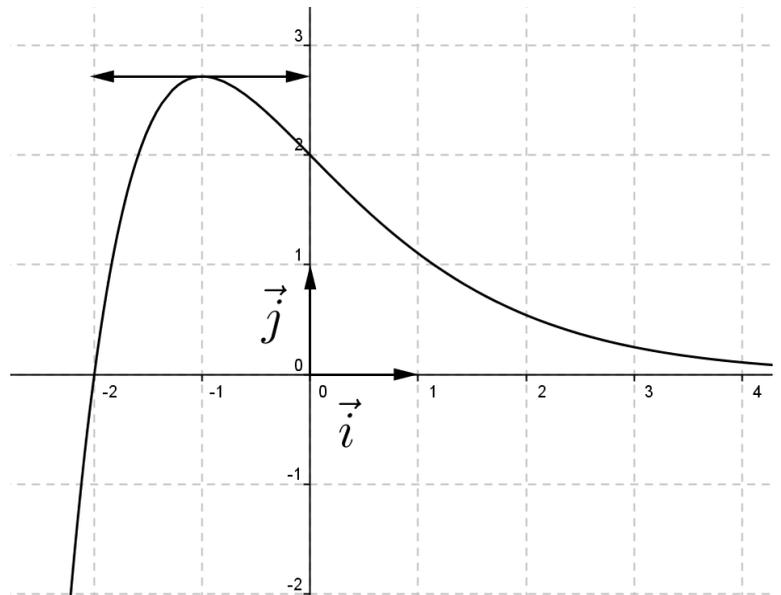
limitée par la courbe (\mathcal{C}) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$

4) a) Montrer que la fonction $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y' + y = 0$

c) Montrer qu'une fonction g dérivable sur \mathbb{R} est solution de (E) si et seulement si $g - u$ est solution de (E_0) . En déduire toutes les solutions de (E).

d) Déterminer alors la fonction f



Exercice 2 (7 points)

Partie A

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1) Etudier le sens de variation de φ

2) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une solution unique $\alpha \in [-1,28; -1,27]$

3) Etudier le signe de $\varphi(x)$ sur \mathbb{R} .

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan

muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique 1 cm pour l'axe des abscisses et 2 cm pour l'axe des ordonnées).

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter le résultat

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

c) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$

2) a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{e^x \varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$

b) En déduire le tableau de variation de f .

3) a) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0

b) Etudier la position de (C) par rapport à T.

4) Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à D.

5) Tracer sur un même graphique les droites T, D et la courbe (C).

Exercice 3 (7 points)

Une étude statistique indique que 95 % des téléviseurs fabriqués par une entreprise sont en état de fonctionnement.

On fait subir à chaque appareil un test de contrôle. On constate que :

- Un appareil est accepté dans 91,6 % des cas à l'issue du test ;
- Quand un appareil est en état de fonctionnement, il est accepté dans 96 % des cas à l'issue du test.
- Quand un appareil n'est pas en état de fonctionnement, il peut être accepté

On choisit au hasard un téléviseur fabriqué par l'entreprise.

On définit les événements suivants :

*F : « le téléviseur est en état de fonctionnement » ;

*T : « le téléviseur est accepté à l'issue du test » ;

1) Déterminer les probabilités suivantes

$p(F)$, $p(T)$ et $p(T/F)$

2) Calculer la probabilité que le téléviseur ne soit pas en état de fonctionnement.

3) a) Calculer la probabilité qu'un téléviseur soit refusé à l'issue du test sachant qu'il est en état de fonctionnement.

b) Calculer la probabilité que le téléviseur soit refusé à l'issue du test et qu'il soit en état de fonctionnement

4) a) Montrer que la probabilité que le téléviseur accepté à l'issue du test et qu'il ne soit pas en état de fonctionnement est $p(T \cap \bar{F}) = 0,004$

b) En déduire la probabilité que le téléviseur accepté à l'issue du test sachant qu'il n'est pas en état de fonctionnement.

5) Quelle est la probabilité pour qu'un téléviseur soit en état de fonctionnement sachant qu'il est refusé à l'issue du test ?

6) a) Un électroménager passe une commande de 3 télévisions

Calculer la probabilité que 1 télévision dans cette commande ne soit pas en état de fonctionnement.

b) L'électroménager exige que sur une commande de n télévisions la probabilité d'avoir au moins une télévision n'est pas en état de fonctionnement reste inférieure 40 % déterminer le nombre maximum de télévision que l'on peut commander.