

Exercice n°1 (4 points)

Soient les intégrales suivants :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$$

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

Soit la fonction f définie sur [0,1] par : $\ln(x+\sqrt{x^2+2})$

- 1) a- Montrer que f est dérivable sur [0,1] et calculer f'(x)
b- En déduire la valeur de I
- 2) a- Sans calculer J et K vérifier que J+2I=K
b- Montrer que $K = \sqrt{3} - J$
c- En déduire les valeurs de J et K

Exercice n°2 (4 points)

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + y = 0$

2) Soit l'équation différentielle (E') : $y' + y = 1 + e^{-x}$

- a- Montrer que la fonction g définie sur IR par $g(x) = 1 + xe^{-x}$ est une solution de (E')
- b- Montrer que f est une solution de (E') si et seulement si f-g est une solution de (E)
- c- Déduire les solutions de (E')
- d- Déterminer f la solution de (E') tel que f(0)=0

Exercice n°3 (5 points)

On considère une urne U_1 contenant quatre boules blanches numérotées 0,0,1,2 et deux boules noires numérotées 1,2

- 1) On tire simultanément et au hasard deux boules , calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A « Obtenir une seule boule noire »
B « Obtenir deux boules dont le produit des numéros inscrits sur les boules tirées est nul »
C « Obtenir une seule boule noire sachant que le produit des numéros inscrits sur les boules tirées est nul »
- 2) Soit X l'alea numérique indiquant la somme de deux nombres inscrits sur les deux boules tirées
a- Déterminer la loi de probabilité de X
b- Calculer E(x) , V(x)
c- Déterminer F la fonction de répartition de la variable aléatoire X

On dispose d' une urne U_2 contenant trois boules blanches et deux boules noires et d'une pièce de monnaie parfaite

- 3) On considère l'épreuve suivante , on lance la pièce de monnaie
- Si on obtient face , on tire simultanément et au hasard deux boules de U_1
 - Si on obtient pile , on tire successivement et sans remise deux boules de U_2
- a- Calculer la probabilité de l'événement : H « Obtenir une seule boule blanche »
- b- Sachant que les deux boules tirées sont blanches , quelle est la probabilité d'obtenir pile

Exercice n°4 (7 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{2e^x-1}{e^x+1}$, on désigne par (C) courbe dans un repère orthonormé

- 1) a- Dresser le tableau de variation de f
 b- En déduire que f est bijection de \mathbb{R} sur $] -1,2[$
 d- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x un réel de $] -1,2[$
- 2) a- Montrer que le point $I(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (C)
 b- Ecrire une équation de la tangente T à la courbe (C) au point I
- 3) on pose $g(x) = f(x) - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$
 a- Montrer que g est strictement décroissante sur \mathbb{R}
 b- Calculer $g(0)$, en déduire la position relative de (C) et T
- 4) a- Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α , vérifier que $1,25 < \alpha < 1,75$
 b-Tracer (C) et T
- 5) a- Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x) = \frac{3e^x}{e^x+1} - 1$
 b-Calculer l'aire de la partie limitée par (C) , l'axe des abscisses , et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$

BON TRAVAIL