

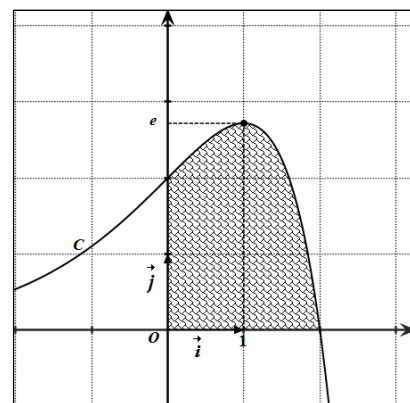
Exercice1(4pts)

Répondre par **vrai** ou **faux** aux quatre assertions suivantes sans justification.

1. La courbe C ci-contre est celle d'une fonction f continue sur \mathbb{R} . C coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(2,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0,2)$ et passe par le point de

coordonnées $(1,e)$. Soit $I = \int_0^2 f(x)dx$ l'aire en unités d'aire du

domaine ombré.



Un encadrement possible de I est : $e < I < 2e$.

2. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite bornée. La suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $V_n = \frac{U_n}{n}$ converge vers 0.

3. Soient A et B deux évènements tels que $p(A) = \frac{3}{5}$; $p(B) = \frac{7}{10}$ et $p(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{10}$.

a) Les évènements A et B sont indépendants.

b) Si E est un évènement tel que $p(E/A) = 0,2$ et $p(E) = 0,5$ alors $p(A/E) = 0,24$.

Exercice2(4pts)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

1. a) Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$.

b) Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[; f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

c) En déduire que $\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

2. Calculer l'intégrale $J = \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$.

Exercice2(6pts)

Pour une marque de téléphone portable donnée, on s'intéresse à deux options de dernière technologie proposées, le GPS (global positioning system) et le Wifi. Sur l'ensemble des téléphones portables, 40 % possèdent l'option GPS. Parmi les téléphones avec l'option GPS, 60 % ont l'option Wifi. On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque et on suppose que tous les téléphones ont la même probabilité d'être choisis. On considère les évènements suivants :

G : " le téléphone possède l'option GPS ".

W : « le téléphone possède l'option Wifi ».

On suppose que la probabilité de W est $p(W)=0,7$.

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1/ Compléter: $p(G)=\dots\dots\dots$; $p(\bar{G})=\dots\dots\dots$ et $p(W/G)=\dots\dots\dots$

2/ Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, qui sera complété tout au long de l'exercice.

3/ Déterminer la probabilité de l'évènement D : « Le téléphone possède les deux options ».

4/ a) Démontrer que $p(W/\bar{G}) = \frac{23}{30}$. Compléter l'arbre de la deuxième question.

b) Déterminer la probabilité de l'évènement U : « Le téléphone est équipé d'une seule option ».

5/ On choisit un téléphone avec l'option Wifi. Quelle est la probabilité qu'il ne possède pas l'option GPS ?

Exercice3(6pts)

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 4e^3 \\ U_{n+1} = 2\sqrt{U_n}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/ a) Montrer par récurrence la propriété \mathcal{P}_n : « $\forall n \in \mathbb{N}; U_n > 4$ ».

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire qu'elle est convergente vers une certaine limite l que l'on déterminera.

2/ On considère la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \ln\left(\frac{U_n}{4}\right)$.

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

b) Exprimer alors V_n en fonction de n . Quelle est la limite de V_n ?

c) Montrer que $U_n = 4e^{\left(\frac{3}{2^n}\right)}$. Retrouver alors le réel l de la question 1/c).