L.A.B.BEMBLA

Mr : Chortani Atef
Mbarki JAMEL

Devoir de contrôle N°3

A.S :2012 -2013 **Durée :2h** **Classe :4SC$_{1\text{et }2}$**

Exercice 1: (4 pts)

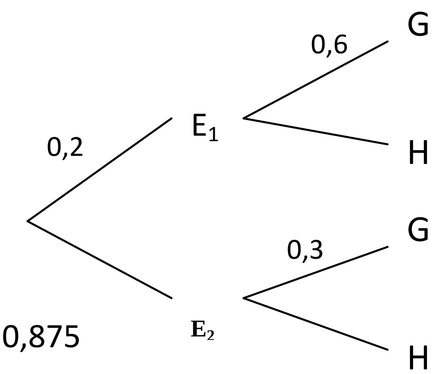
Pour chacune des questions suivantes une seule réponse proposée est exacte.

L'exercice consiste à choisir la réponse exacte sans justification.

1) A et B sont deux événements indépendants tels que $p(A) = 0{,}7$ et $p(B) = 0{,}2$.
   $p(A \cap B) = 0{,}14$ $\quad$ $p(A \cup B) = 0{,}9$ $\quad$ $p(B/A) = 0{,}5$

2) Une pièce de monnaie est telle que la probabilité d'obtenir le côté face est égale à $\frac{1}{3}$.
   On lance 4 fois de suite cette pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le côté face ?
   $\frac{18}{81}$ $\quad$ $\frac{72}{81}$ $\quad$ $\frac{65}{81}$

3) On considère l'arbre pondéré ci-contre.



   Quelle est la probabilité de $p(F/H)$?
   $p(F/H) = 0{,}7$ $\quad$ $p(F/H) = 0{,}56$ $\quad$ $p(F/H) = 0{,}875$

4) Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires.
   On tire, avec remise, une boule au hasard, *n* fois de suite (avec *n* > 1). Quelle est la probabilité d'obtenir des boules qui ne soient pas toutes de la même couleur ?
   $1-\frac{1}{2^n}$ $\quad$ $1-\frac{1}{2^{n-1}}$ $\quad$ $1-\frac{1}{2^{2n}}$

Exercice 2 : (5pts)

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=\sqrt{e^x+1}$ et **(C_f)** sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis interpréter le résultat obtenu.

2) a) Montrer que pour tout réel x, on a : $\sqrt{e^x+1} \geq e^{\frac{x}{2}}$.

   b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, puis interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Montrer que f est dérivable sur IR et calculer f’(x) pour tout réel x.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe **(C_f)**.

4) Soit $C=\{M(x,y) \text{ tels que } y=f(x) \text{ et } 0\le x\le 1\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l’axe $(O,\vec{i})$. Calculer le volume de S.

<u>Exercice 3 :</u> (6 pts)

1) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\dfrac{e^{1,15x}}{99+e^{1,15x}}$.

a) Démontrer que $f(x)=\dfrac{1}{1+99e^{-1,15x}}$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Etudier les variations de la fonction f.

2) Une ville compte 10000 habitants. A huit heures du matin 100 personnes apprennent une nouvelle par la radio locale, on note $f(t)$ la fréquence des personnes connaissant la nouvelle à l’instant t (en heure) , on choisit 8h du matin comme instant initiale t=0 ainsi $f(0)=\dfrac{100}{10000}=0,01$. La nouvelle se répand en ville de sorte que la vitesse de propagation $f'(t)$ vérifie $f'(t)=1,15f(t)\left[1-f(t)\right]$.

On considère, sur l’intervalle $[0,+\infty[$, la fonction h définie par $h(t)=\dfrac{1}{f(t)}$

a) Montrer que h est une solution de l’équation différentielle (E) $y'=-1,15y+1,15$

b) Résoudre l’ équation (E),en déduire que $f(x)=\dfrac{1}{1+99e^{-1,15x}}$.

a) Déterminer à partir de quelle heure (à une unité prés) 99% de la population de cette ville connaîtra la nouvelle.

<u>Exercice 4 :</u> (5pts)

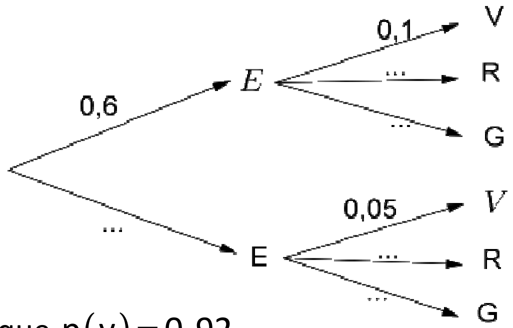
Deux éleveurs produisent une race de poissons d’ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu’à l’âge de trois mois :

- Pour les alevins du premier élevage, entre l’âge de deux moins et l’âge de trois mois, 10% n’ont pas survécu, 75% deviennent rouges et les 15% restant deviennent gris.

- Pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux moins et l'âge de trois mois, 5% n'ont pas survécu, 65% deviennent rouges et les 30% restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60% au premier éleveur, 40% au second.

1) Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.
   On définit les évènements suivants :
   -E_1 : « le poisson provient du premier élevage » ; -E_2 : « le poisson provient du deuxième élevage » ;
   -V : «le poisson est toujours vivant à trois mois»; - R : « le poisson est rouge à l'âge de trois mois » ;
   -G : « le poisson est gris à l'âge de trois mois ».
   a) Compléter l'arbre de probabilités Modélisant la situation .



   b) Calculer la probabilité $p(\overline{v})$, en déduire que $p(v)=0,92$
   c) Déterminer la probabilité que le poisson est gris Sachant qu'il provienne du premier élevage .
   d) Montrer que $p(G)=0,21$, en déduire $p(E_1/G)$
2) Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plut tard, seulement trois soient en vie ? on donnera une valeur approchée à 10^{-2} prés.
3) L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne **1 Dinars** si le poisson est rouge **0,250 Dinars** s'il est gris et perd **0,100 Dinars** s'il ne survit pas .
   Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centième.

<u>Exercice 3 :</u> (7pts)

1) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$.

d) Démontrer que $f(x)=\dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.

e) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

f) Etudier les variations de la fonction f.

2) On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée t g(t). On définie ainsi une fonction g de l'intervalle $[0,+\infty[$ sur IR.

La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années.
L'unité choisie pour g(t) est la centaine d'individus.
Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0,+\infty[$, de l'équation différentielle $(E_1)\quad y'=\dfrac{1}{4}y$.

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b) Déterminer l'expression de g(t) lorsque, à la date t=0, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire g(0)=1.

c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

3) En réalité, dans un secteur observé d'une région donné, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs.

On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$(E_2)\begin{cases} u'(t)=\dfrac{u(t)}{4}-\dfrac{[u(t)]^2}{12} \\ u(0)=1 \end{cases}$ pour tout nombre réel t positif ou nul, où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t)\succ 0$. On considère, sur l'intervalle $[0,+\infty[$, la fonction h définie par $h(t)=\dfrac{1}{u(t)}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions :

$(E_3)\begin{cases} h'(t)=-\dfrac{1}{4}h(t)+\dfrac{1}{12} \\ h(0)=1 \end{cases}$ pour tout nombre réel t positif ou nul, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$.