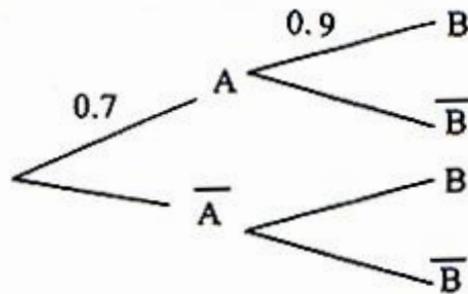


Exercice I :

I) Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de choix ci-dessous où A et B sont deux événements dont \bar{A} et \bar{B} sont leurs événements contraires respectifs tel $P(B) = 0.87$.



Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse dans chacun des cas suivants :

1) $P(A \cap B) = 0.63$	2) $P(A \cup B) = 0.75$
3) $P(B/\bar{A}) = 0.8$	4) $P(A/B) = 0.35$

II) Cocher l'unique réponse exacte dans chacun des cas suivants :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$ et soit F sa

fonction de répartition.

a) On a :

i) $P(X = 2) = 10 \cdot \frac{2^2}{3^5}$	ii) $P(X = 2) = 10 \cdot \frac{2^3}{3^5}$	iii) $P(X = 2) = \frac{2^3}{3^5}$
--	---	-----------------------------------

b) Si F est la fonction de répartition de X alors :

i) $F(0.9) = \left(\frac{2}{3}\right)^5$	ii) $F(0.9) = \frac{5}{3}$	iii) $F(0.9) = \left(\frac{1}{3}\right)^5$
--	----------------------------	--

c) Si X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[3, 19]$ alors la probabilité de $(X \leq 7)$ est :

i) $\frac{1}{4}$	ii) $\frac{7}{16}$	iii) $\frac{3}{4}$
------------------	--------------------	--------------------

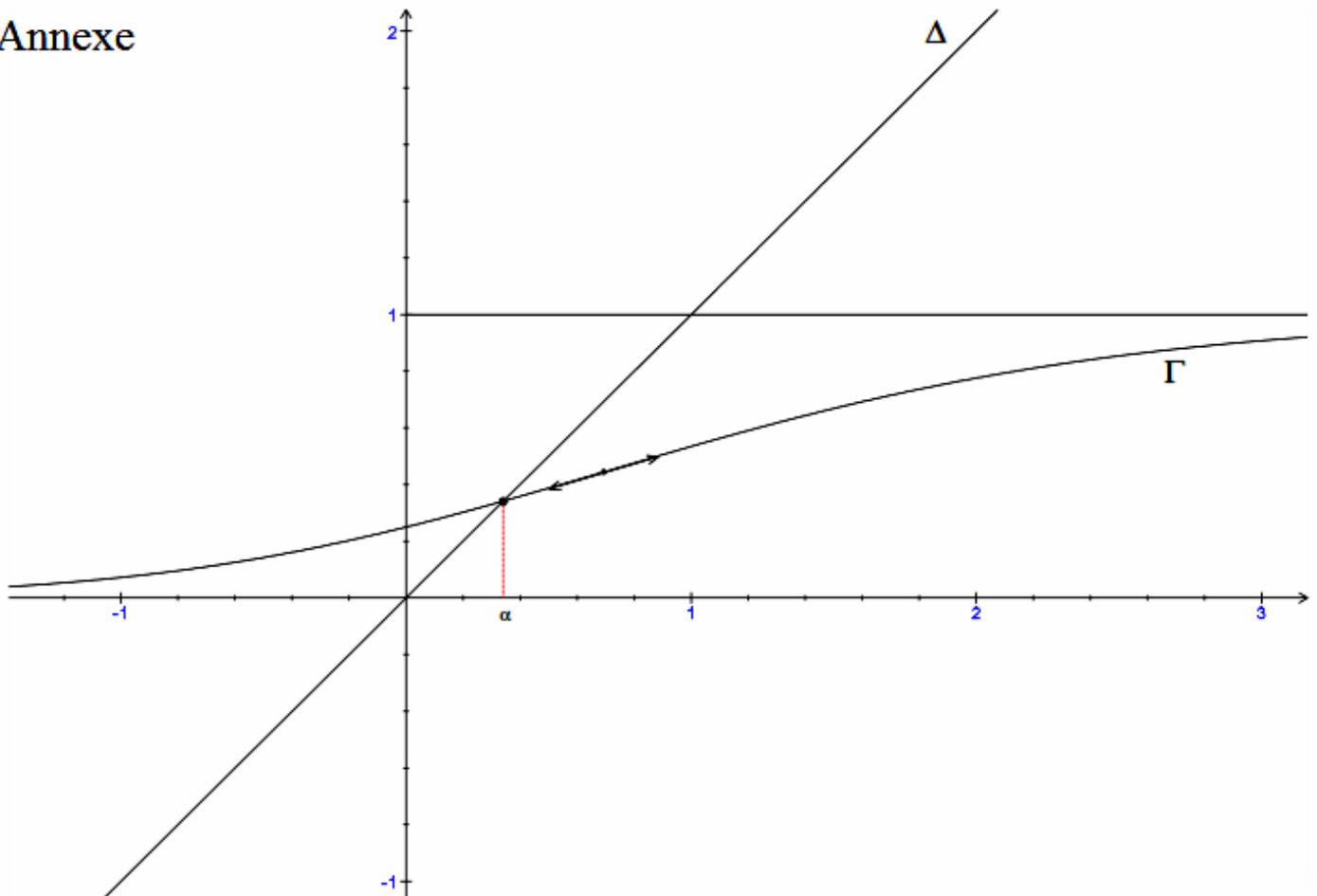
Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{(1+e^{-x})^2}$

On a représenté sur la feuille annexe la courbe Γ de f et la droite $\Delta : y = x$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1. a. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle I que l'on précisera.
b. Montrer que pour tout $x \in I$, $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$.
c. Préciser $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$. Tracer soigneusement la courbe Γ' de f^{-1} dans le même repère.
2. a. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
b. On désigne par \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ et les droites $x = 0$, $x = \alpha$ et $y = \alpha$.
Montrer que $\mathcal{A} = \alpha^2 - \ln\left(\frac{1+e^\alpha}{2}\right) - \frac{1}{1+e^\alpha} + \frac{1}{2}$. En déduire l'intégrale $\int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) dx$.
c. Déterminer en fonction de α l'aire \mathcal{B} de la partie du plan limitée par les courbes Γ , Γ' et les deux axes.

Annexe



Exercice 3:

Une urne contient 7 boules indiscernables au toucher dont 3 blanches numérotées (0,0,1) et 4 noires numérotées (0,1,1,2).

I) On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne. On considère les événements

A « Avoir un produit nul », B « Avoir une seule boule blanche » et C « A / B ».

1) Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$ et montrer que $P(C) = \frac{5}{6}$.

2) On répète l'épreuve précédente 6 fois de suites en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne et on désigne par X l'aléa numérique qui indique le nombre de fois où l'événement C est réalisé.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

c) Calculer la probabilité d'avoir l'événement C pour la troisième fois au quatrième tirage.

II) On dispose de plus d'un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance le dé une fois, si on obtient un multiple de 3 alors on tire simultanément 3 boules de l'urne et sinon on tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne. Soient les événements M «Le numéro de la face supérieure du dé est un multiple de 3» et N « Avoir 3 boules de même numéro ».

1) Calculer les probabilités : $P(M)$, $P(N)$.

2) Calculer la probabilité $P(M / N)$

Exercice 4:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$

a- Montrer que pour tout réel positif t on a : $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.

b- En déduire que pour tout réel positif x : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

c- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x - \frac{x^2}{2n} \leq n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$

Puis que $e^{x - \frac{x^2}{2n}} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$

d- Montrer alors que $\int_0^n e^{-x - \frac{x^2}{2n}} dx \leq I_n \leq 1 - e^{-n}$.