

## DEVOIR DE CONTROLE N°2

Durée 2h : 4è Sc Ex

**EXERCICE N°1(4points)**L'espace étant rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ On considère l'ensemble  $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$  et le plan  $P: x + z - 1 = 0$  et les points  $A(2, 0, -1)$  et  $B(0, 0, -1)$ 1° a) Vérifier que  $S$  est une sphère, donner son centre  $\Omega$  et son rayonb) Montrer que les points  $A$  et  $B$  sont deux points diamétralement opposés de  $S$ 2° Démontrer que le plan et la sphère sont sécants suivant un cercle  $C$  dont on précisera le centre et le rayon3° Soit  $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$  et  $M(\cos^2 t + 1, \sqrt{2} \cos t \sin t, -\cos^2 t)$ a- Calculer  $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ , en déduire que  $M \in S$ b- Montrer que le point  $M$  appartient au planc- En déduire que quand  $t$  varie sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  le point  $M$  varie sur un cercle que l'on précisera**EXERCICE N°2(6points)**L'espace  $(\xi)$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ A)  $(S_m) : \{M(x, y, z) \in (\xi) \text{ tels que: } x^2 + y^2 + z^2 - 4(m-1)x + 2(m-1)y - 2(m-1)z = 0\}$   
avec  $m$  est un paramètre réel et  $P$  le plan d'équation :  $2x - y + z = 0$ 1° Montrer que pour tout  $m \neq 1$ ,  $(S_m)$  est la sphère de centre  $\Omega_m(2m-2, 1-m, m-1)$ et de rayon  $R_m = \sqrt{6} |m-1|$ 2° Déterminer l'ensemble des points  $\Omega_m$  quand  $m$  varie dans  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ 3° Montrer que  $P$  tangent à  $(S_m)$  pour tout  $m \neq 1$ B) On considère les points  $A(4, 0, 0)$ ,  $B(0, -2, 0)$  et  $C(0, 0, 2)$ 1° a) Calculer le vecteur  $\vec{N} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$ b) Déduire que le plan  $(ABC)$  a pour équation :  $x - 2y + 2z - 4 = 0$ 2° a) Calculer le volume du tétraèdre  $OABC$ b) Déduire la hauteur  $h$  du tétraèdre issue de  $O$ 3° a) Vérifier que la sphère  $(S_2)$  est la sphère circonscrite au tétraèdre  $OABC$ b) Déterminer le rayon  $r$  et le centre  $H$  du cercle  $(C)$  intersection de  $(S_2)$  et du plan  $(ABC)$ c)  $H$  est-il le pied de la hauteur du tétraèdre  $OABC$ , issue de  $O$ ? justifier votre réponse**EXERCICE N°3(4points)**1) Démontrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tout  $x$  de  $[0, 1]$  on a

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$

2) Déduire que pour  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  on a :  $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ 3) Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définies sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$  et

$$v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

a) Montrer que ces deux suites sont adjacentes

b) Donner un encadrement à  $10^{-2}$  de leur limite

### EXERCICE N° 4(6points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x^2 - \ln x$  et on désigne par  $(\Gamma)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1° a) Calculer  $\lim_{0^+} f(x)$  et  $\lim_{+\infty} f(x)$

b) Calculer  $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter graphiquement le résultat

c) Dresser le tableau de variation de  $f$

2° Dans l'annexe ci - jointe on a tracé dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe (L) de la fonction  $\ln$  et la courbe (C) d'équation  $y = x^2$

a) Soit  $x > 0$ . On considère les points M et N de même abscisse  $x$  et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que  $MN = f(x)$

b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe  $(\Gamma)$  d'abscisses respectives

$$2, \frac{1}{e}, \sqrt{\frac{1}{2}}$$

c) Tracer la courbe  $(\Gamma)$  dans le même repère

3° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C),  $(\Gamma)$ , les droites  $x = \frac{1}{2}$  et  $x = 1$



