

Lycée Tahar Sfar Mahdia	<i>Devoir de contrôle n° 3</i> Mathématiques	Classe : 4 ^{ème} Sc exp1
Date : 05 / 03 / 2018	Prof : Meddeb Tarak	Durée : 2 heures

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (8 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1[$ par : $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a/ Montrer que f est dérivable sur $[0 ; 1[$ et que $f'(x) = \frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

b/ Montrer que f est une bijection de $[0 ; 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On désigne par C' la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

c/ Tracer C et C' . On précisera $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

d/ En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx.$$

2) Soit F la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ par : $F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt$.

On pose, pour $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = F(\sin x)$.

a/ Montrer que g est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ et calculer $g'(x)$.

b/ En déduire que $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$, pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$.

(On rappelle que : $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$).

c/ Montrer alors que $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$, puis calculer $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx$.

3) On désigne par \mathcal{A} l'aire de la région du plan limitée par C , C' et les droites d'équations :

$$x=0 \text{ et } x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

a/ Montrer que $\mathcal{A} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

b/ En déduire que $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f^{-1}(x) dx = \frac{\pi-2}{8}$.

Exercice n°2 : (5 pts)

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx$.

1) a/ Vérifier que, pour tout réel x , on a : $\cos^4 x = \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x)$.

b/ En utilisant une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3}J$.

On admet dans la suite que $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3}I$.

2) a/ Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{8}$.

b/ Montrer que $I - J = 0$.

c/ Calculer alors les intégrales I et J .

Exercice n°3 : (7 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1; 0; 0)$; $B(-1; 2; 0)$; $C(-1; 0; 2)$ et $D(1; 2; 2)$.

1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

2) a/ Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b/ Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : $x + y + z - 1 = 0$.

3) Soit le point $G\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC .

4) Soit \mathcal{C} le cercle circonscrit au triangle ABC .

a/ Montrer que (DG) est l'axe de \mathcal{C} .

b/ Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier.

5) Pour tout réel α , on désigne par S_α l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(1-\alpha)x - 2\alpha y - 2\alpha z + 2\alpha - 3 = 0.$$

a/ Montrer que S_α est la sphère de centre $I_\alpha(-1+\alpha; \alpha; \alpha)$ et de rayon $R_\alpha = \sqrt{3\alpha^2 - 4\alpha + 4}$.

b/ Vérifier que A appartient à S_α .

c/ Montrer que I_α appartient à (DG) .

d/ Déterminer l'intersection de S_α et du plan (ABC) .