Lycée : Beni khaled Nahj El Menzeh | Pr. Kaddour Abdelhamid

DEVOIR DE CONTROLE N°2

Durée 2h : 4è Sc Ex

EXERCICE N°1(4points)

L'espace étant rapporte à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère l'ensemble S: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ et le plan P : $x + z - 1 = 0$

et les points A (2, 0, -1) et B(0, 0 , -1)

1° a) Vérifier que S est une sphère , donner son centre Ω et son rayon

b) Montrer que les points A et B sont deux points diamétralement opposés de S

2° Démontrer que le plan et la sphère sont sécants suivant un cercle C dont on précisera le centre et le rayon

3° Soit t € $[0, \frac{\pi}{2}[$ et M ($\cos^2 t + 1$, $\sqrt{2}\cos t \sin t$, $-\cos^2 t$)

a- Calculer $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB}$, en déduire que M € S

b- Montrer que le point M appartient au plan

c- En déduire que quand t varie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ le pont M varie sur un cercle que l'on précisera

EXERCICE N°2(6points)

L'espace (ξ) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

A) (S_m) : $\{M(x, y, z) \in (\xi)$ tels que: $x^2 + y^2 + z^2 - 4(m-1)x + 2(m-1)y - 2(m-1)z = 0\}$

avec m est un paramètre réel et P le plan d'équation : $2x - y + z = 0$

1° Montrer que pour tout $m \neq 1$,(S_m) est la sphère de centre Ω_m (2m -2, 1- m, m -1)

et de rayon $R_m = \sqrt{6}\,|m-1|$

2° Déterminer l'ensemble des points Ω_m quand m varie dans IR \ {1}

3° Montrer que P tangent à (S_m) pour tout $m \neq 1$

B) On considère les points A(4 , 0 , 0) , B(0 , - 2 , 0) et C(0 , 0 , 2)

1° a) Calculer le vecteur $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) Déduire que le plan (ABC) à pour équation : $x - 2y + 2z - 4 = 0$

2° a) Calculer le volume du tétraèdre OABC

b) Déduire la hauteur **h** du tétraèdre issue de O

3° a) Vérifier que la sphère (S_2) est la sphère circonscrit au tétraèdre OABC

b) Déterminer le rayon r et le centre H du cercle $(\mathcal{C})$ intersection de (S_2) et du plan (ABC)

c) H est-il le pied de la hauteur du tétraèdre OABC , issue de O ? justifier votre réponse

EXERCICE N°3(4points)

1) Démontrer que pour tout n de IN^* et tout x de [0 , 1] on a

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$

2)Déduire que pour n de IN^* on a : $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

3) Soit $((u_n)$ et $(v_n))$ les suites définies sur IN^* par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ - ln (n) et

$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$ - ln(n+1)

a)Montrer que ces deux suites sont adjacentes

b) Donner un encadrement à 10^{-2} de leur limite

EXERCICE N° 4(6points)

On considère la fonction f définie sur $]0 , +\infty[$ par $f(x) = x^2 - \ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1° a) Calculer $\lim_{0^+} f(x)$ $\quad et \quad$ $\lim_{+\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat

c) Dresser le tableau de variation de f

2° Dans l'annexe ci - jointe on a tracé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (L) de la fonction ln et la courbe (C) d'équation $y = x^2$

a) Soit $x > 0$. On considère les points M et N de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C) . Vérifier que MN = f(x)

b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives

2 , $\frac{1}{e}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$

c) Tracer la courbe (Γ) dans le même repère

3° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C), (Γ) , les droites $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$

Annexe (à rendre avec la copie)