

## DEVOIR DE CONTROLE N° 3

18/04/2009

SECTIONS : 4<sup>ème</sup> Sciences Expérimentales 1

EPREUVE : Mathématiques

DUREE : 2 heures

PROFESSEUR : Mr FLIGENE Wissem

**Exercice 1:** (3 pts)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions, trois réponses sont proposées; une seule de ces réponses convient.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point et une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.

1. Pour tous réels  $a$  et  $b$ , strictement positifs,  $\ln(ab) - \ln(a^2)$  est égal à :

a)  $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

b)  $\ln(b-a)$

c)  $\frac{\ln b}{\ln a}$

2.  $e^{-2\ln 3}$  est égal à :

a)  $\frac{2}{3}$

b)  $\frac{1}{9}$

c) 9

3. L'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'inéquation  $e^{3x} - 1 \geq 0$  est l'intervalle

a)  $[0, +\infty[$

b)  $[1, +\infty[$

c)  $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

**Exercice 2:** (6 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = \ln x + 2x^2 - 3$ .

Le tableau de variation de la fonction  $g$  est donné ci-dessous :

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$g$			

En utilisant une calculatrice on a obtenu  $\alpha \approx 1,19$ .

Dresser le tableau donnant le signe de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$

2. On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} + 2x - 5$ .

On note  $C_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Déterminer la limite de la fonction  $f$  à droite en 0.

b) Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

3. On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

a) Calculer  $f'(x)$  et montrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0, +\infty[$ , on a :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire le tableau de variations de  $f$ .

c) Déterminer le signe de  $f(x)$  pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à  $e$ .

d) Montrer que la droite  $D: y = 2x - 5$  est une asymptote à  $C_f$

e) Tracer la courbe représentative de  $f$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4. Soit  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = (\ln x)^2$ .

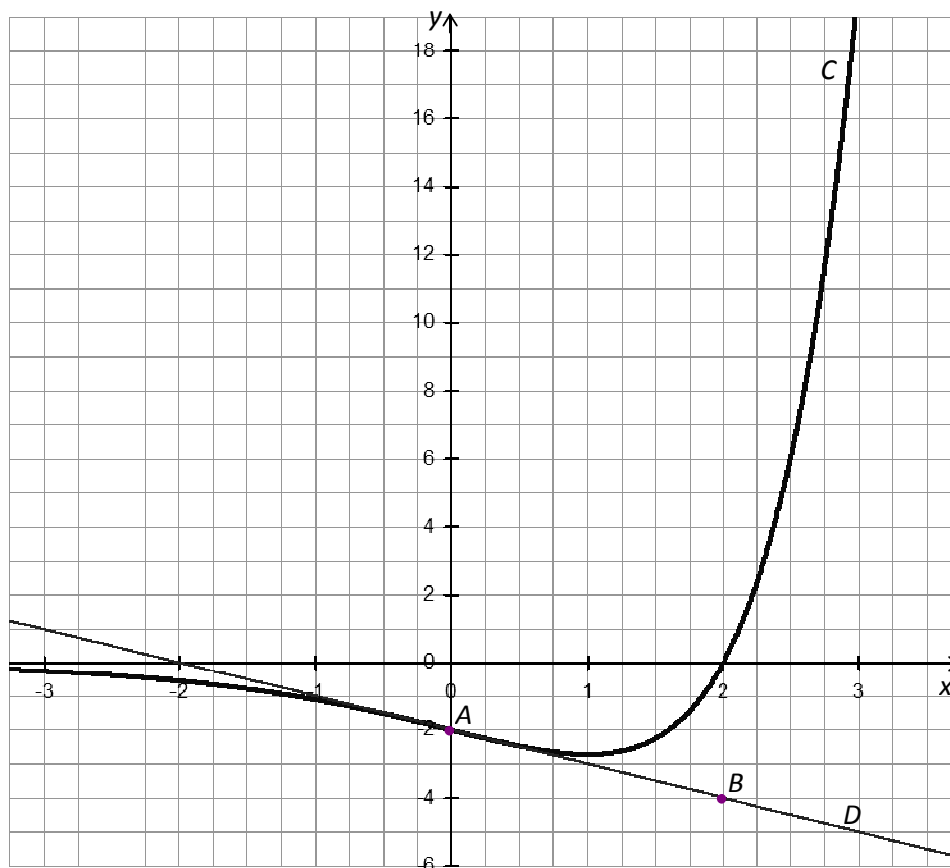
a) Calculer la dérivée  $h'$  de  $h$ .

- b) En remarquant que pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0, +\infty[$ , on a :  $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{2}h'(x) + 2x - 5$ , trouver une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
- c) Déterminer l'aire en unités d'aire de la partie du plan délimité par la courbe  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x=e$  et  $x=e^2$  (On donnera la valeur exacte, puis une valeur décimale arrondie au dixième).

**Exercice 3:** (6 pts)

**PARTIE A**

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe  $C$  ci-dessous représente une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ . La tangente  $D$  à la courbe  $C$  au point  $A(0, -2)$  passe par le point  $B(2, -4)$ .



On désigne par  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

1. a) Donner la valeur de  $f(0)$ .  
b) Justifier que :  $f'(0) = -1$ .
2. On admet qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = (x+a)e^{bx}$ .  
a) Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = (bx + ab + 1)e^{bx}$ .  
b) Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs exactes des réels  $a$  et  $b$ .

**PARTIE B**

On considère maintenant la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = (x-2)e^x$ .

1. Donner l'expression de  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ ; en déduire le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .  
b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. a) Calculer  $\int_2^3 f(x) dx$ .

b) Préciser le signe de  $f(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $[2, 3]$ .

Interpréter graphiquement l'intégrale  $\int_2^3 f(x) dx$

**Exercice 4:** (5 pts)

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'adhérents d'un club de rugby de 2001 à 2006.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang $x_i$	1	2	3	4	5	6
Nombre d'adhérents $y_i$	70	90	115	140	170	220

On cherche à étudier l'évolution du nombre  $y$  d'adhérents en fonction du rang  $x$  de l'année.

**PARTIE A :** un ajustement affine.

1. Dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 20 adhérents sur l'axe des ordonnées, représenter le nuage de points associé à la série  $(x_i, y_i)$
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Interpréter le résultat
3. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés et la tracer sur le graphique précédent (*les coefficients seront arrondis à l'unité*).
4. En supposant que cet ajustement reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'adhérents en 2009.

**PARTIE B :** un ajustement exponentiel.

On pose  $z = \ln y$ .

1. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de  $z_i$  au millième.

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$z_i$	4,248					

2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de  $z$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis au millième*).
3. En déduire une approximation du nombre d'adhérents  $y$  en fonction du rang  $x$  de l'année.
4. En prenant l'approximation  $y \approx 57,1 e^{0,224x}$  et en supposant qu'elle reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'adhérents en 2009.

**PARTIE C :** comparaison des ajustements.

En 2009, il y a eu 430 adhérents. Lequel des deux ajustements semble le plus pertinent ? Justifier la réponse.

Correction

Solution-Exercice 1

- 1) a)                      2) b)                      3) a)

Solution-Exercice 2

1-

$x$	$0$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$		-	+

2- a)  $\lim_{0^+} f = +\infty$

b)  $\lim_{+\infty} f = +\infty$

3) a)  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} + 2 = \frac{\ln x + 2x^2 - 3}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

b)  $\text{signe}(f'(x)) = \text{signe}(g(x))$

$x$	$0$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

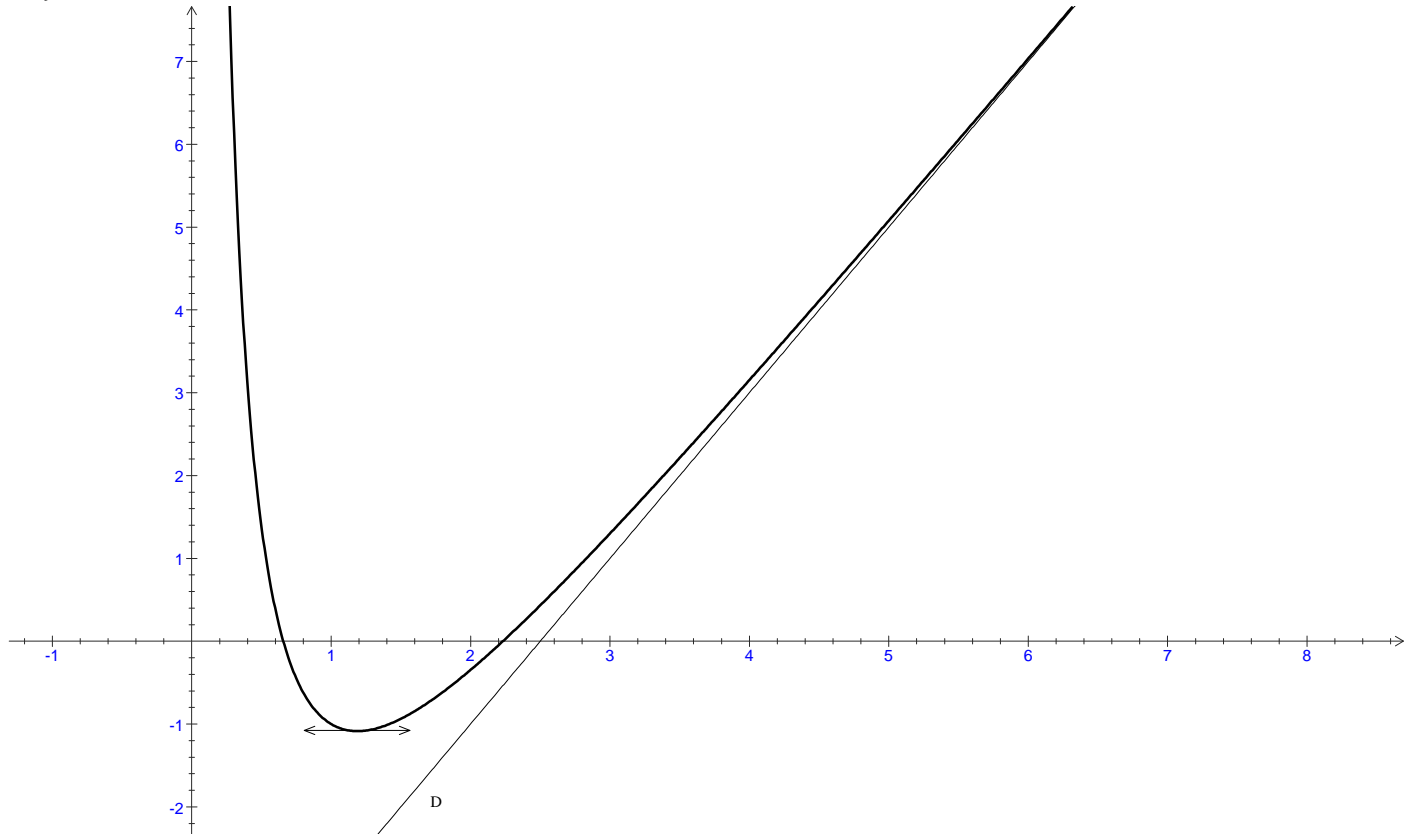
c)  $e \in [\alpha, +\infty[$  et  $f$  est strictement croissante sur  $[\alpha, +\infty[$ , alors si  $x \geq \alpha$  alors  $f(x) \geq f(\alpha)$

or  $f(\alpha) = \frac{2}{e} - \frac{1}{e} + 2e - 5 = 2e + \frac{1}{e} - 5 \approx 0,7 > 0$  donc  $f(x) > 0$

d)  $\lim_{+\infty} [f(x) - (2x - 5)] = \lim_{+\infty} \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} = 0 - 0 = 0$  donc  $D: y = 2x - 5$  est une asymptote à  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

e) \*  $(O, \vec{j})$ :  $x = 0$  est une asymptote verticale à  $C_f$

\*  $C_f$  admet en  $S(\alpha, f(\alpha))$  une tangente horizontale (notons que  $\alpha \approx 1,19$  et  $f(\alpha) \approx -1,08$ )



4- a)  $h$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $h'(x) = 2\frac{1}{x} \ln x = 2\frac{\ln x}{x}$

b)  $F(x) = 2\ln|x| - \frac{1}{2}h(x) + x^2 - 5x$  or  $x > 0$  alors  $|x| = x$  et par suite  $F(x) = 2\ln x - \frac{1}{2}h(x) + x^2 - 5x$

c)  $\mathcal{A} = \int_e^{e^2} f(x)dx$  (puisque  $f(x) > 0$ , pour tout  $x \geq e$ ) donc  $\mathcal{A} = [F(x)]_e^{e^2} = F(e^2) - F(e)$

or  $F(e^2) = 2\ln(e^2) - \frac{1}{2}(\ln(e^2))^2 + e^4 - 5e^2 = e^4 - 5e^2 + 2$

et  $F(e) = 2\ln(e) - \frac{1}{2}(\ln(e))^2 + e^2 - 5e = e^2 - 5e + \frac{3}{2}$

ainsi :  $\boxed{\mathcal{A} = e^4 - 6e^2 + 5e + \frac{1}{2} \approx 24,4 \text{ u. a}}$

Solution-Exercice 3

**PARTIE A**

1- a)  $f(0) = -2$

b)  $f'(0)$  est la pente de D donc  $f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4+2}{2-0} = -1$

2- a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = e^{bx} + be^{bx}(x+a) = (1+bx+ab)e^{bx} = (bx+ab+1)e^{bx}$

b)  $f(0) = -2 \Leftrightarrow \boxed{a = -2}$

$f'(0) = -1 \Leftrightarrow -2b + 1 = -1 \Leftrightarrow -2b = -2 \Leftrightarrow \boxed{b = 1}$

**PARTIE B**

1-  $f'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$  donc  $\text{signe}(f'(x)) = \text{signe}(x-1)$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\ominus$	$+$



2- a)  $\lim_{+\infty} f = +\infty$

b)  $\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty} x e^x - e^x = 0 - 0 = 0$  alors  $(O, \vec{i}) : y = 0$  est une asymptote horizontale à C au voisinage de  $-\infty$

3- a)  $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x-2)e^x dx$

Soit  $u(x) = x - 2 \rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x \rightarrow v(x) = e^x$

Donc  $\int_2^3 f(x)dx = [(x-2)e^x]_2^3 - \int_2^3 e^x dx = e^3 - [e^x]_2^3 = e^3 - (e^3 - e^2) = e^2$

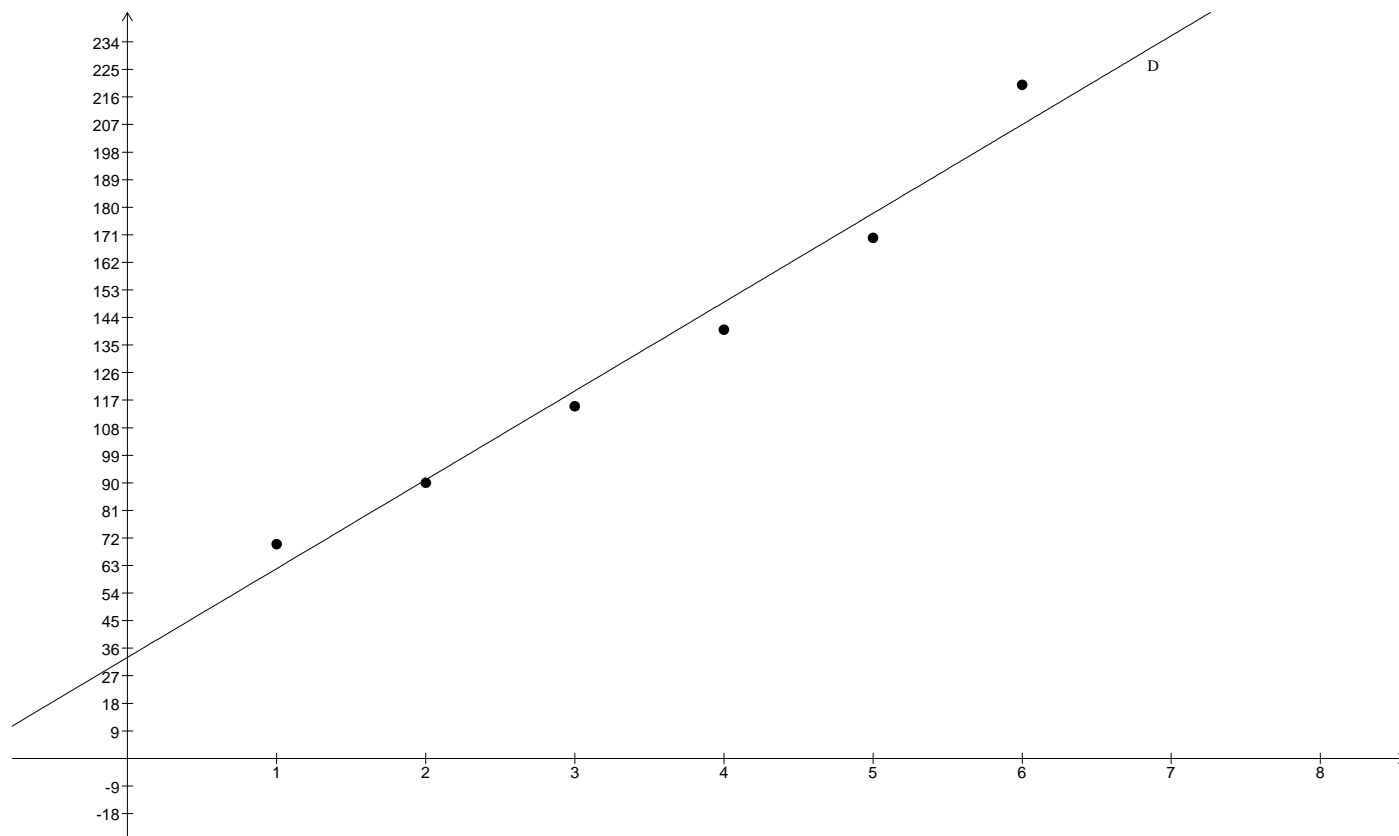
b)  $\text{signe}(f(x)) = \text{signe}(x-2)$  et pour tout  $x \in [2,3] : x-2 \geq 0$  alors  $f(x) \geq 0$

$\int_2^3 f(x) dx$  est l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 2$  et  $x = 3$



sSolution-Exercice 4

**PARTIE A**



2-  $\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = 0,98$  (d'après la calculatrice)

$|\rho_{XY}| = 0,98 > \frac{\sqrt{3}}{2}$  alors la corrélation linéaire est forte donc un ajustement affine est justifié

3-  $D: y = a(x - \bar{X}) + \bar{Y}$  où  $a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} = 29$  d'où  $D: y = 29x + 33$

4- Le rang de l'année 2009 est 9 donc  $y = 29 \times 9 + 33 = 294$  adhérents

**PARTIE B**

1-

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$z_i$	4,248	4,5	4,745	4,942	5,136	5,394

2-  $z = a'(x - \bar{X}) + \bar{Z}$  où  $a' = \frac{\text{cov}(X,Z)}{V(X)} = 0,224$  donc  $z = 0,224x + 4,044$

3- comme  $z = \ln y$  alors  $\ln y = 0,224x + 4,044 \Leftrightarrow y = e^{0,224x+4,044} \Leftrightarrow y = e^{4,044} e^{0,224x}$  donc  $y = 57,054 e^{0,224x}$

4- pour  $x = 9$ ,  $y = 57,054 e^{0,224 \times 9} \approx 429$  adhérents

**PARTIE C**

429 est proche de 430 donc l'ajustement exponentiel semble le plus pertinent

