MINISTERE DE L'EDUCATION

DIRECTION REGIONALE DE JENDOUBA

Anneé scolaire : 2016-2017

Lycée Pilote de Jendouba

DEVOIR DE CONTROLE N 1

2éme Trimestre

MATHEMATIQUE

Classes: 4 Sciences expérimentales

Durée de l'épreuve: 2 heures

.Les calculatrices scientifiques sont autorssées

. . Le sujet comporte une annexe a rendre avec la copie

EXERCICE 1:

.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

On considère les points $A(0,0,2)$; $B(1,0,0)$ *et* $C(0,-1,0)$ et $I(1,1,1)$

1) a) Montrer que les points A , B *et* C déterminent un plan P.
   b)Montrer qu'une équation de P est $-2x+2y-z+2=0$
   c) Calculer $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI}$ .En déduire que $I\notin P$
   d) Calculer le volume du tétraèdre ABCI . Déduire alors la distance du point I au plan P.

2)Soit S l'ensemble des points M (x,y,z) de l'espace tels que :

$$x^2+y^2+z^2-4y-5=0$$

   a) Montrer que S est une sphére ; préciser son centre Ω et son rayon.
   b)Etudier la position relative de S et P et caractériser leur intersection.

3)Pour tout réel m on associe le plan P_m dont une équation cartésienne est :

$$2mx+(1-2m)y+mz+1-2m=0$$

   a)Déterminer m pour que le plan P_m soit tangent a S .
   b)Soit H le point de contact de P_m et S lorsqu'ils sont tangents.
   Déterminer les coordonnées de H.

EXERCICE 2:

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

On considère le point $A(0,0,-1)$, le plan $Q: x=y$ et la droite $\Delta:\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=-\alpha \\ z=1 \end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$

1) Soit le plan P qui contient la droite Δ et passant par le point A
   a) Montrer que le plan P est d'équation : $2x+2y-z-1=0$
   b) Montrer que P et Q sont perpendiculaires
   c) Soit P' le plan parallèle à P et passant par le point O. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\Delta'=P'\cap Q$
   d) Montrer que Δ et Δ' ne sont pas coplanaires
2) Soit S_m l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :
   $x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+2my-2z+m^2+m+1=0$ où m est un paramètre réel
   a) Montrer que S_m est une sphère dont on déterminera le centre I_m et le rayon R_m
   b) Déterminer l'ensemble de points I_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$
   c) Déterminer $P\cap S_0$

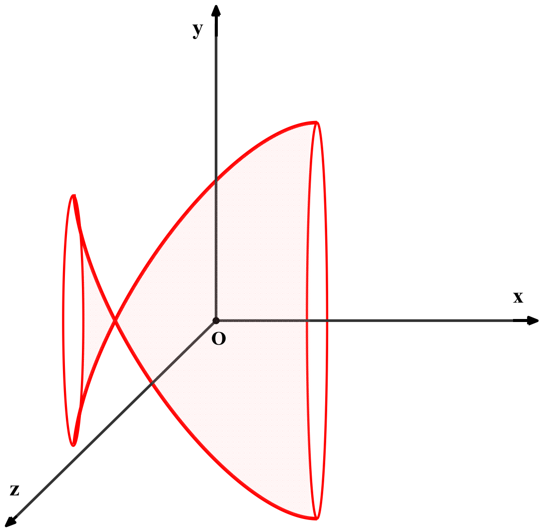
.

.

EXERCICE 3 :

Dans l'annexe ci-joint (Figure 1), on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $I=\left[-\sqrt{2},1\right]$ par $f(x)=x+\sqrt{2-x^2}$ et les demi tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses $-\sqrt{2}$ et 1.

1) Calculer le volume $\mathscr{V}$ du solide de révolution engendré par la rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses



2) a) Justifier graphiquement que f réalise une bijection de I sur un intervalle J qu'on précisera

b) Tracer sur la figure 1, la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de f^{-1} la fonction réciproque de f.

3) Soit F la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x)=\int_0^{-\sqrt{2}\sin x}\sqrt{2-t^2}\,dt$

a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $F'(x)=-1-\cos(2x)$

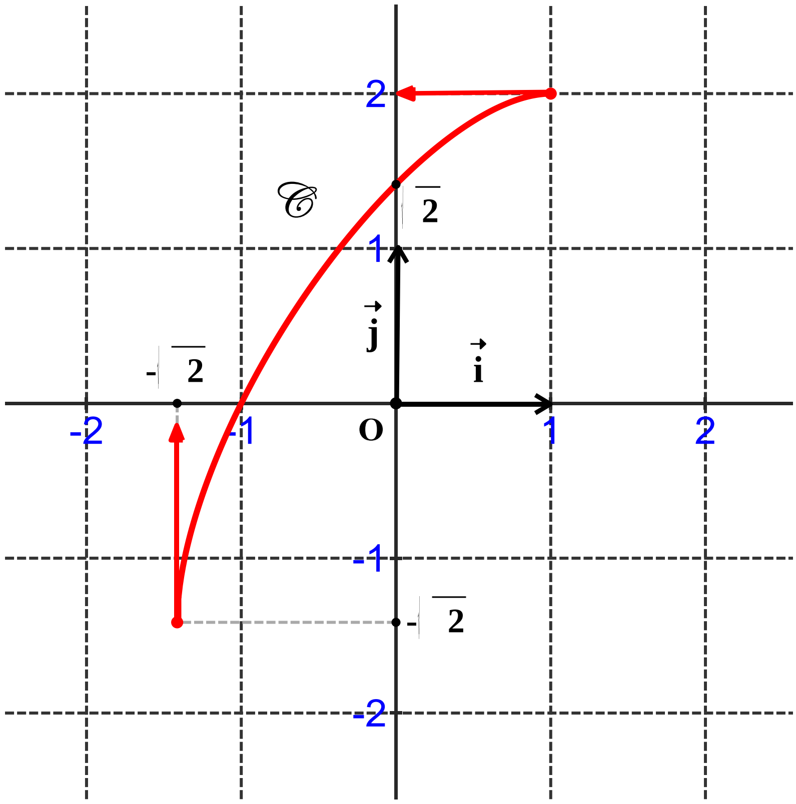
b) Calculer $F(0)$ et en déduire l'expression de $F(x)$.

c) Calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et en déduire l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations : $y=0$ et $y=x$

4) a) Montrer que pour tout $x\in J$, $f^{-1}(x)=\dfrac{x-\sqrt{4-x^2}}{2}$

En déduire la valeur de l'intégrale $K=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Figure 1 **ANNEXE A RENDRE**



Nom et prénom :