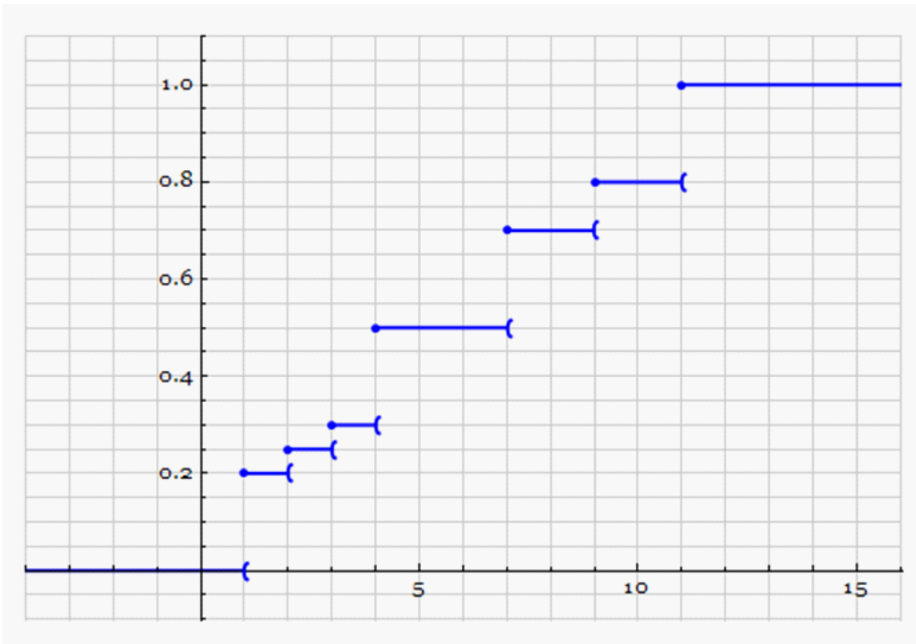
L-Mateur | Devoir de contrôle: n°4 | Prof: Talbi Rachid
Classe:$4SC_2$ | Durée : $2H$ | Le 19 / 04 /2017

EXERCICE ❶ $(4pts)$

Soit X la variable aléatoire définie sur un univers Ω dont la fonction de répartition F est représentée ci-contre dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On admet que toutes les valeurs prises par X sont entières.



1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X en complétant le tableau suivant.

x_i	....	....	....	....	....	....	....
$p(X = x_i)$	....	....	....	....	....	....	....

3. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

EXERCICE ❷ $(6pts)$

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs: 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3.
Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres: des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.On considère les événements:

   H_1 : " L'arbre choisi a ètè acheté chez l'horticulteur H_1"

   H_2 : " L'arbre choisi a ètè acheté chez l'horticulteur H_2"

   H_3 : " L'arbre choisi a ètè acheté chez l'horticulteur H_3"

   C : " L'arbre choisi est un conifère"

   F : " L'arbre choisi est un arbre feuillu"

   (a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

(b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

(c) Justifier que $p(C) = \dfrac{21}{40}$

(d) L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait étè acheté chez l'horticulteur H_1?

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie.On suppose que ce stock est suffisament important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

   Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   (b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères?

   (c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus?

   (d) Calculer le nombre moyen des arbres conifères.

EXERCICE ❸ $(6pts)$

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - xe^x + 1$

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

   (b) Montrer que $g'(x) = -xe^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

   (c) En déduire le tableau de variation de g.

2. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une sule solution α et que $1,2 < \alpha < 1,3$

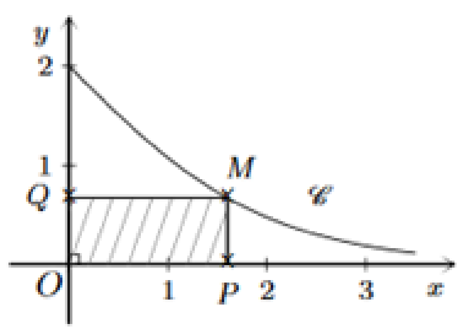
   (b) Montrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

   (c) Déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$ et C_f dans un repère orthonormé d'origine O.

Soit les points $M\,(x, f(x))$, $P\,(x, 0)$ et $Q\,(0, f(x))$



1. Exprimer l'aire du rectangle $OPMQ$ en fonction de x.

2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $\varphi(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$

(a) Montrer que $\varphi'(x)$ a le même signe de $g(x)$,pour tout $x \in \mathbb{R}$

(b) En déduire les variations de la fonction φ.

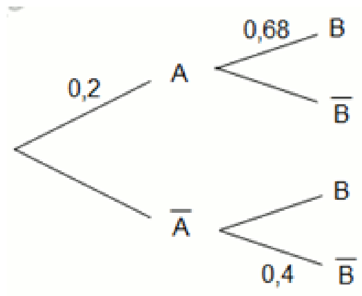
3. (a) Montrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque $x_M = \alpha$

   (b) Déterminer un encadrement de cette aire maximale.

   (c) La tangente T à C_f au point M d'abscisse α est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

EXERCICE ❹ $(4pts)$

On considère l'arbre de probabilités suivant:



1. (a) Compléter cet arbre.

   (b) Déterminer $p(A \mid B)$ et $p(B)$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$a)\ e^x - e^{-x} = 0$ $\qquad b)\ e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$ $\qquad c)\ e^{\frac{x}{2}} < e$