

**EXERCICE N°1**

1) Calculer  $(-1 + i\sqrt{3})^2$ .

2) On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $2z^2 - a(7 + i\sqrt{3})z + 2a^2(3 + i\sqrt{3}) = 0$  où  $a$  est un nombre complexe non nul.

a) Déterminer les solutions  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation (E).

b) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{U}, \vec{V})$  on désigne par  $A, M_1$  et  $M_2$  les points d'affixes respectives  $a, z_1$  et  $z_2$ . Montrer que le triangle  $AM_1M_2$  est équilatéral.

**EXERCICE N°2**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{U}, \vec{V})$ .

1) Déterminer les racines cubiques de 216.

2) On désigne par  $A, B$  et  $C$  les points images de ces racines. On note  $A$  le point dont l'affixe est réel et  $B$  celui dont l'affixe a une partie imaginaire positive. Construire  $A, B$  et  $C$ .

3) Soit  $F$  le point d'intersection de la droite  $(AC)$  et l'axe  $(O, \vec{V})$ .

a) Déterminer  $z_F$  l'affixe du point  $F$ . Vérifier que  $(z_F)^3 = 24i\sqrt{3}$ .

b) Déterminer alors les autres racines.

4) Soit  $D$  et  $E$  les points images de ces deux racines. On note  $D$  le point dont l'affixe a une partie réelle positive.

a) Construire  $D$  et  $E$ .

b) Montrer que les points  $D$  et  $E$  sont respectivement sur les segments  $[AB]$  et  $[BC]$

et que  $AD = BE = CF$

**EXERCICE N°3**

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $[0,1]$  telle que  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \forall x \in [0,1]$  et  $f(0) = 0$ .

1) a) Montrer que pour tout  $t \in [0,1], \frac{1}{2} \leq f'(t) \leq 1$ .

b) En déduire que pour tout  $x \in [0,1], \frac{1}{2}x \leq f(x) \leq x$ .

2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  par  $g(x) = f(\tan x)$ .

a) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  et calculer  $g'(x)$ .

b) Montrer que pour tout  $x$  de  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  on a  $g(x)=x$ .

c) En déduire que  $f(1)=\frac{\pi}{4}$

## EXERCICE N°4

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(2) = 2$  et  $(C)$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan. Dans le graphique ci-dessous  $(C')$  est la courbe de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ .

L'axe des abscisses est une asymptote de  $(C')$ .

1) a) Etudier la monotonie de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Etudier la monotonie de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) Montrer que  $(C)$  admet exactement deux points d'inflexions dont on précisera leurs abscisses.

3) Montrer que  $(C)$  admet exactement deux tangentes horizontales

4) Montrer que la tangente  $T$  à  $(C)$  au point d'abscisse 2 passe par le point  $A(0,1)$ .

5) Soit  $U$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} U_0 = \frac{5}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrer que  $U_n \geq 2 \forall n \in \mathbb{N}$ .

b) Montrer que  $|U_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |U_n - 2| \forall n \in \mathbb{N}$ .

c) En déduire que  $|U_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \forall n \in \mathbb{N}$ .

d) Déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

**EXERCICE N°5**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0,2[$  par  $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} & \text{si } x \in ]0,2[ \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1)a) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0,2[$  et que  $f'(x) = \frac{x}{(\sqrt{2x-x^2})^3} \quad \forall x \in ]0,2[$

d) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2)a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0,2[$  sur  $[0,+\infty[$

b) Montre que  $f^{-1}(x) = \frac{2x^2}{1+x^2} \quad \forall x \in [0, +\infty[$

c) Tracer dans le même repère les courbes  $(C)$  et  $(C')$  de  $f$  et  $f^{-1}$  (On précisera la tangente au point d'abscisse 1)

3) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  par :  $g(x) = f^{-1}(\tan x)$

a) Montrer que pour tout  $x$  de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$   $g(x) = 1 - \cos(2x)$

b) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  sur  $[0,2]$

c) Calculer  $g^{-1}(0)$  et  $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

d)  $g^{-1}$  est-elle dérivable à droite en 0 ?

c) Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $]0,2[$  et que  $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}} \quad \forall x \in ]0,2[.$