Lycée Ibn Rachiq Kairouan

SECTION : 4 Sc3

DEVOI R A LA MAISON

sadfi M^{ed} Ahmed

EXERCICE :1

Pour tout réel $\theta \in]0, \pi[$ on considère l'équation dans ℂ (E) : $z^3 + 4z^2 + (5 - e^{i2\theta})z - 4i\,\mathrm{Sin}\theta . e^{i\theta} = 0$

1) a- prouver que $e^{i\theta}$ est une racine carré de $1 + 2i\,\mathrm{Sin}\,\theta . e^{i\theta}$

b- montrer que (- 2) est une solution de (E) puis la résoudre

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on désigne par A, M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs $z_A = -2$, $z_1 = -1 + e^{i\theta}$ et $z_2 = -1 - e^{i\theta}$

a- mettre sous la forme exponentielle z_1 et $\dfrac{z_1}{z_2}$

b- montrer que les points M_1 et M_2 sont symétrique par rapport a un point fixe I a préciser

c- déterminer ζ_1 l'ensemble des points M_1 quant θ varie puis déduire ζ_2 l'ensemble des points M_2

3) a- montrer que OM_1AM_2 est un rectangle

b- déterminer θ pour la quelle OM_1AM_2 est un carré

EXERCICE :2

A) soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 1 - \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x+1}$

On désigne par ζ_f sa courbe dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 4 cm)

1) a – étudier la dérivabilité de f a droite de 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu

b – montrer que f et dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x}}$

c – dresser le tableau de variation de f

2) a – Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera on note f^{-1} sa fonction réciproque

b – montrer que f^{-1} est dérivable sur J

c – expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

3) a – montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0, +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]0, 1[$

b – Construire ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère

B) soit la fonction g définie sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $\begin{cases} g(x) = f\left(\dfrac{1}{\mathrm{Sin}(x)} - 1\right) \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

1) a – montrer que la fonction g est continue à droite en 0

b – montrer que pour tout x de $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ $g(x) = 1 - \mathrm{Cos}(x)$

2) a – montrer que g réalise une bijection de $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$ et calculer $g^{-1}(0)$, $g^{-1}(1)$ et $g^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

b – montrer que pour tout x de $[0, 1]$ on a $\mathrm{Cos}(g^{-1}(x)) = 1 - x$

c – montrer que la fonction g^{-1} est dérivable sur $]0, 1]$ et que $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$